Analyse à plusieurs variables
DST n°2 - 25 novembre 2023

Durée : 45 min. Documents et calculatrice interdits.
Vous devez indiquer votre groupe de TD dans l'en-tête de votre copie.

Question 1. (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Question 2. (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$. Etudier les extrema locaux de f.

Question 3. (4 pts) Soit la 1-forme différentielle $\omega = z\exp(zy)dx + \big(xz^2\exp(zy) + 2y\big)dy + (x+xyz)\exp(zy)dz$ sur $\mathbb{R}^3$. Trouver une primitive de ω.

Question 4. (4 pts) Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x\cos(z) \\ z - x^2 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^3$. Trouver un champ de vecteurs $\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{W}$ sous la forme $W_x(x,y,z) = \phi(x,y)$, $W_y(x,y,z) = xz + \sin(y)$ et $W_z(x,y,z) = \psi(x,z)$, avec $W_x(x,0,z) = 1$, $W_z(0,y,z) = 0$.

Question 5. (4 pts) Calculer l'intégrale double $\iint_D f$ où $f(x,y) = x^2y$ et D est le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1 - x^2$. On représentera graphiquement le domaine D avec précision.

Question 6. (4 pts) Calculer l'intégrale triple $\iiint_D f$ où $f(x,y,z) = 1$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 6\}$.