DST n°2 APV

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

• Montrons que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ où $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$

et on obtient $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)|$

$$= \left| \frac{\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta\,(r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta))}{\cancel{r^2}} \right| = r^2 |\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, f est continue en $(0,0)$. Or $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

f est continue en tant que quotient de fonctions continues

Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De plus, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$

On a $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$

et $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0 et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^4y+3x^2y^3-y^3x^2-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-y^5+x^4y+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = g(x,y)$$

De même $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3-3y^2x)(x^2+y^2)-2yx(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5+x^3y^2-3y^2x^3-3y^4x-2y^2x^3+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5-y^4x-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = h(x,y)$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{g((0,0)+t(1,0))-g(0,0)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

De plus, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-t^5}{t^5} = -1$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

De même, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{h(t,0)-h(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

Ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. La contraposée du théorème de Schwartz prouve que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$

* Etudions les extremas de f :

Tout d'abord on recherche les points critiques de f.

(x_0, y_0) est un point critique de $f \iff \nabla f(x_0, y_0) = 0$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_0^2 - y_0 = 0 \\ 2y_0 - x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ 12y_0^2 - y_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ y_0(12y_0 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ y_0 = 0 \\ \text{ou } y_0 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Ainsi les points critiques de f sont les points $(x_0, y_0) = (0,0)$; $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$

De plus, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$. D'après le Théorème de Schwartz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -1$$

Ainsi, la matrice Hessienne de f est donnée par

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

. De plus $\det(H_f(x,y)) = 12x - 1$

Ici $\det(H_f(0,0)) = -1 < 0$

De plus, $\det(Hf(1/6, 1/12)) = 12 \times \frac{1}{6} - 1 = 1 > 0$

Le premier terme sur la diagonale est donné par $1 > 0$

Finalement, $(0,0)$ est un point selle et $(1/6, 1/12)$ est un minimum local strict

Exercice 3 :

On considère la 1-forme différentielle

$$\omega = ze^{zy}dx + (xz^2e^{zy} + 2y)dy + (x + xyz)e^{zy}dz$$

sur $\mathbb{R}^3$.

On cherche une fonction f telle que $\omega = df$.

Ici, on peut montrer que ω est exacte (ω est fermée et $\mathbb{R}^3$ est étoilé).

Alors $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

Par identification
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ze^{zy} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz^2e^{zy} + 2y & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (x + xyz)e^{zy} & (3) \end{cases}$$

On intègre (1) par rapport à x et on trouve $f(x,y,z) = xze^{zy} + \alpha(y,z)$ avec $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Or $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z^2xe^{zy} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z) = xz^2e^{zy} + 2y$

Donc $\frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z) = 2y \Rightarrow \alpha(y,z) = y^2 + \beta(x)$

où $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction

Ainsi, $f(x,y,z) = xze^{zy} + y^2 + \beta(x)$

De même $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ze^{zy} + \beta'(x) = ze^{zy}$ d'après (1)

$\Rightarrow \beta'(x) = 0 \Rightarrow \beta(x) = K$ où $K \in \mathbb{R}$

Finalement, $f(x,y,z) = xze^{zy} + y^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 4</u> :

Soit le champ de vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x\cos(z) \\ z - x^2 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^3$

Trouvons $\vec{W}$ tel que $\vec{V} = \vec{rot}\,\vec{W}$

Par définition, $\vec{rot}\,\vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{rot}\,\vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \\ \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x \\ 0 - \frac{\partial \psi(x,z)}{\partial x} \\ z - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = -x \\ 2x\cos(z) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,z) \\ z - x^2 = z - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,z) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,z) = -2x\cos(z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi(x,z) = C_1 + \beta(x) \text{ où } \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathbb{R} \\ \psi(x,z) = -x^2\cos(z) + \alpha(z) \text{ où } \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \phi(x,y) = x^2 y + \gamma(x) \text{ où } \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

Or $\phi(x,0) = W_x(x,0,z) = 1$ ce qui implique
$\gamma(x) = 1$ et donc $W_x(x,y,z) = x^2y+1$

De plus, $W_z(0,y,z) = \psi(0,z) = 0$
On obtient $\alpha(z) = 0 \Rightarrow \alpha(z) = K$ où $K \in \mathbb{R}$

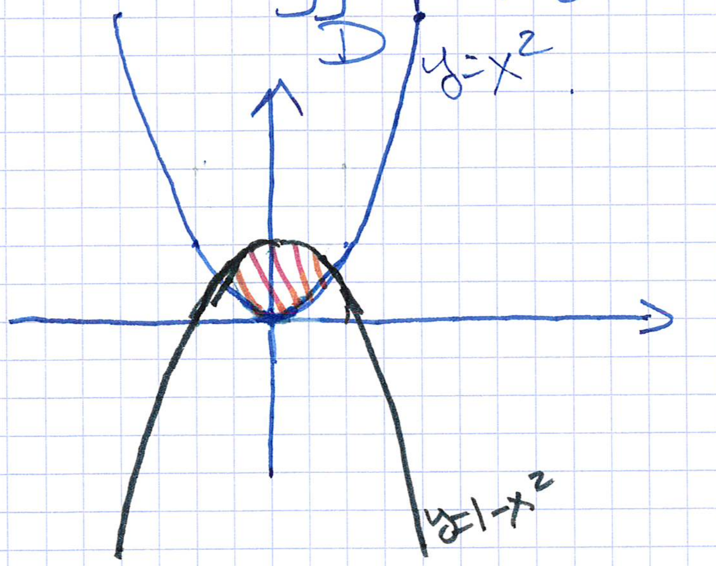
Ainsi, $\psi(x,z) = -x^2\cos(z) + K$ où $K \in \mathbb{R}$. Or $\psi(0,z) = 0 \Rightarrow K = 0$

Finalement $\vec{W} = \begin{pmatrix} x^2y+1 \\ xz+\sin(y) \\ -x^2\cos(z) \end{pmatrix}$

Exercice 5:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2y$ et $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y = x^2 \text{ et } y = 1-x^2\}$

Calculons $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$



On a $y = x^2 \geq 0$ et donc $x^2 \leq 1$
d'où $x \in [-1,1]$. De plus, $x^2 \leq 1-x^2$
ssi $x \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$

Ainsi $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } x^2 \leq y \leq 1-x^2\}$

$$I = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{x^2}^{1-x^2} x^2y\,dxdy$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1-x^2} dx$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{x^2}{2}\left((1-x^2)^2 - x^4\right) dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{x^2}{2}(1-2x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} - \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}$$

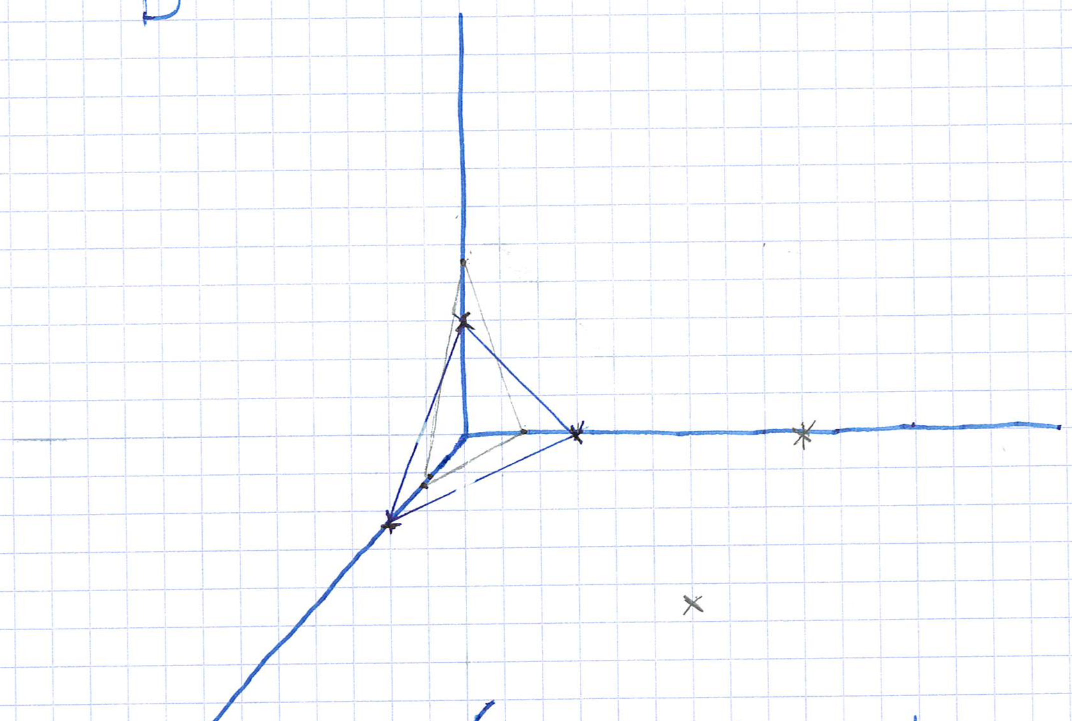
$$= \frac{1}{6}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right) - \frac{1}{5}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5\right)$$

Ainsi, $I = \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{5}\frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{20} = \frac{4\sqrt{2}}{120} = \frac{\sqrt{2}}{30}$

Exercice 6:

Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0, x+2y+3z \leq 6\}$

Calculons $\iiint_D 1 \, dx\,dy\,dz = I$



Ici, $x \leq 6$ par exemple (on pourrait aussi borner y ou z par 6)

On a donc $2y + 3z \leq 6 - x \iff z \leq \frac{6-x-2y}{3}$

De plus, $y + \frac{3}{2}z \leq \frac{6-x}{2} \iff y \leq \frac{6-x}{2}$

Donc $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 3 - \frac{1}{2}x; 0 \leq z \leq \frac{6-x-2y}{3}\}$

Alors, $I = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{\frac{6-x}{2}} \int_{z=0}^{\frac{6-x-2y}{3}} 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{6-x}{2}} [z]_0^{\frac{6-x-2y}{3}} dy\,dx = \int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{6-x/2} \frac{6-x-2y}{3} dy\,dx$

$$I = \int_{x=0}^{6} \left[\left(\frac{6-x}{3}\right) y - \frac{2}{3}\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{6-x}{2}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} \left[\left(\frac{6-x}{3}\right)\left(\frac{6-x}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{6-x}{2}\right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_{x=0}^{x=6} (6-x)^2 dx - \frac{1}{12}\int_0^6 (6-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^6 (6-x)^2 = \frac{1}{12}\left[-\frac{1}{3}(6-x)^3\right]_0^6 = -\frac{1}{36}\left(0-6^3\right) = \frac{216}{36} = 6$$