Examen APV - 9 Janvier 2024

Partie I : Questions de cours

1) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. Soit $(x_0, y_0) \in U$.

On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe une application linéaire $L_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tels que $\forall (h,k) \in]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1[\times]y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2[$ où $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ on ait

$$f((x_0, y_0) + (h,k)) = f(x_0, y_0) + L_{(x_0,y_0)}(h,k) + \|(h,k)\| \, \varepsilon(h,k) \text{ où } \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \varepsilon(h,k) = 0$$

2) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f est différentiable sur U et si la différentielle de f est continue sur U.

3) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in U$.

- Si f a un extremum local en (x,y) alors (x,y) est un point critique de f et $df_{(x,y)} = 0$
- Si f admet un minimum local en a, alors a est un point critique de f et la hessienne de f au point (x,y) notée $Hf(x,y)$ est positive
- Si f admet un maximum local en (x,y) alors $Hf(x,y)$ est négative.
- Si (x,y) est un point critique de f et si $Hf(x,y)$ est définie positive alors f admet un minimum local strict en (x,y).
- Si (x,y) est un point critique de f et si $Hf(x,y)$ est définie négative alors f admet un maximum local strict en (x,y).

4) Soit w une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On dit que w est fermée si $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on a

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

- Si w est exacte alors w est fermée
- Si w est fermée et si U est étoilé alors w est exacte.

5) Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. On considère deux domaines élémentaires de $\mathbb{R}^2$ Ω et D où $\Omega \subset U$ et $D \subset V$ avec $\varphi(\Omega) = D$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega (f \circ \varphi)(u,v) \, |J\varphi(u,v)| \, du\,dv$$

Ici $J\varphi(u,v)$ est la matrice Jacobienne de φ au point (u,v)

Dans le cas du changement de variable en coordonnées polaire

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ et $r \leq \rho(\theta)$ où $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue 2π-périodique

Ici le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : D \to \Omega$ est définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

et donc $J\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

D'où $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=0}^{\rho(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

Partie II, Question 1

1) On remarque que $f(x,x) = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$

Ainsi, $\lim_{x \to 0} f(x,x) = +\infty$. D'où f n'est pas $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$

2) On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$|f(x,y)| \leq \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|$ car $|\sin(u)| \leq 1 \ \forall u \in \mathbb{R}$

Par passage aux coordonnées polaires et en posant $x = \underbrace{r}_{>0}\cos\underbrace{\theta}_{\in[0,2\pi]}$ et $y = r\sin\theta$ on trouve

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r|\sin^3\theta| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Donc f est $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$

Remarque : Le passage aux coordonnées polaires n'est pas indispensable puisque $x^2+y^2 \geq y^2$ et donc $|f(x,y)| \leq |y| \to 0$

3) On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ car $e^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$

Ainsi, f est $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$

Question 2

1) $f(x,y) = |x|$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \pm 1$

Ainsi, la dérivée partielle de f n'existe pas en $(0,0)$.

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction f est $\mathcal{C}^0$ comme quotient de polynômes

De plus, comme $x^2+y^2 \geq x^2$ on a

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |y| \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

Donc f est $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

De plus, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Ainsi, si f est différentiable en $(0,0)$ on aurait

$$f((0,0)+(h,k)) = f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$

Alors $\dfrac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} \xrightarrow[\forall (h,k)\to(0,0)]{} 0$

Ainsi, $\dfrac{h^4k}{(h^2+k^2)^{3/2}} \xrightarrow[\forall (h,k)\to(0,0)]{} 0$

Pour $h=k$ on a $\dfrac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Finalement, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

On a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)}{t} = 0$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Finalement

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|(h,k)\|}$

$= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$

Or $\dfrac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leq h^2\dfrac{(k^2+h^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leq \dfrac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$

De même $h^2+k^2 \geq h^2 \Longrightarrow \sqrt{h^2+k^2} \geq |h|$

Alors $\dfrac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leq |h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ Donc f est diff en $(0,0)$

Question 3 :

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y)$ où $u_1(x,y) = x^2+y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x^2+y^2)\, 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(x^2+y^2)\, 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''(x^2+y^2)\, 2x\, 2x + 2\varphi'(x^2+y^2)$$
$$= 4x^2 \varphi''(x^2+y^2) + 2\varphi'(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \varphi''(x^2+y^2)\, 2y\, 2y + 2\varphi'(x^2+y^2)$$
$$= 4y^2\varphi''(x^2+y^2) + 2\varphi'(x^2+y^2)$$

Ainsi, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, alors

$4x^2\varphi''(x^2+y^2) + 4\varphi'(x^2+y^2) + 4y^2\varphi''(x^2+y^2) = 0$

$\Rightarrow 4(x^2+y^2)\varphi''(x^2+y^2) + 4\varphi'(x^2+y^2) = 0$

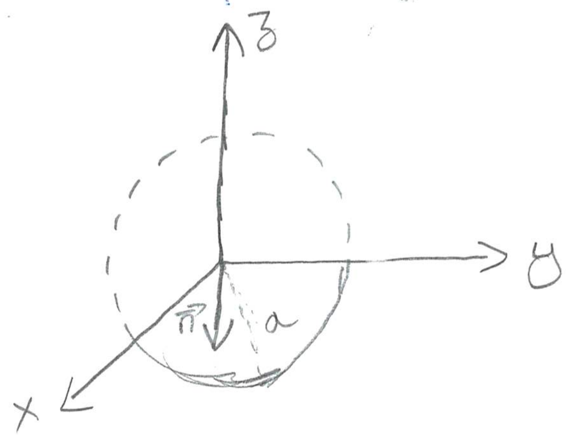
D'où φ' vérifie l'équation différentielle

$4u\, \Phi'(u) + 4\Phi(u) = 0$

ou $u\Phi'(u) + \Phi(u) = 0$

Question 4 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit Γ la courbe d'équation $x^2+y^2 = a^2$ et $x+y = z+a$ orientée dans le sens trigonométrique par rapport à (x,y)



Déterminons un paramétrage de Γ

Posons $\Gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto (a\cos t, a\sin t, a\cos t + a\sin t - a)$$

Alors $I = \int_\Gamma yz\,dx + \int_\Gamma xz\,dy + \int (x^2+y^2-z^2)\,dz$

$$= \int_0^{2\pi} a\sin t\,(a\cos t + a\sin t - a)(-a\sin t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} a\cos t\,(a\cos t + a\sin t - a)\,a\cos t\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t - (a(\cos t + \sin t) - a)^2 (-a\sin t + a\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -a^2\sin^2 t\,(a\cos t + a\sin t - a)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} a^2\cos^2 t\,(a\cos t + a\sin t - a)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} a^2 - (a^2(\cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t\sin t) - 2a^2(\cos t + \sin t) + a^2)\,a(\cos t - \sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -a^3\sin^2 t\cos t - a^3\sin t(1-\cos^2 t) + a^3\sin^2 t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} (a^3(1-\sin^2 t)\cos t + a^3\sin t\cos^2 t - a^3\cos^2 t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} a^2 - (a^2(1 + 2\cos t\sin t) - 2a^2\cos t - 2a^2\sin t + a^2)(a\cos t - a\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^3\cos t\sin^2 t - a^3\sin t + a^3\cos^2 t\sin t + a^3\cos t - a^3\sin^2 t\cos t + a^3\sin t\cos^2 t)\,dt + \int_0^{2\pi} a^3\cos^2 t + a^3\sin^2 t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} a^2 - (a^2 + 2a^2\cos t\sin t - 2a^2\cos t - 2a^2\sin t + a^2)(a\cos t - a\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2a^3\sin^2 t\cos t + 2a^3\cos^2 t\sin t - a^3\sin t + a^3\cos t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} (a^3\sin^2 t - a^3\cos^2 t)\,dt + \int_0^{2\pi} (a^2 - a^3\cancel{\cos t} - a^3\cancel{\sin t} + 2a^3\cos^2 t\sin t$$

$$- 2a^3\cos t\sin^2 t - 2a^3\cos^2 t + 2a^3\cancel{\cos t}\sin t - 2a^3\cancel{\sin t}\cos t$$

$$+ 2a^3\sin^2 t + a^3\cancel{\cos t} - a^3\cancel{\sin t})\,dt$$

Or $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ et $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

$$\Rightarrow I = \left[-2a^3\frac{\sin^3 t}{3} - 2a^3\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} + a^3\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi}$$

$$- a^3\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} + \left[a^2 t - 2a^3\frac{\cos^3 t}{3} - 2a^3\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$- 2a^3\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} + 2a^3\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \cancel{2\pi a^2}\ 0$$

6

Question 5 :

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

où $(a,b) \in \mathbb{R}_*^{+}$.

1ère méthode :

On utilise un changement de variable en coordonnées polaires. On pose

$x = ar\cos\theta$ et $y = br\sin\theta$; $r \in [0,1]$; $\theta \in [0,2\pi]$

On définit l'application $\varphi : \hat{D} \longrightarrow D$

$(r,\theta) \longmapsto \varphi(r,\theta) = (x,y)$

φ définit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme et la jacobienne de φ au point (r,θ) est donnée par $J\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix}$

D'après le cours

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\,dy = \int_{r=0}^{r=1}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2}\right) |\det J_\varphi(r,\theta)|\, dr\,d\theta$$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\, abr\, dr\,d\theta = ab\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 2\pi$$

$$= \frac{\pi ab}{2}$$

2ème méthode :

On va utiliser la formule de Green-Riemann. Pour cela on va identifier la courbe paramétrée qui entoure D puis on va identifier deux fonctions P et Q de classe $\mathcal{C}^1$ tq

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

On pose $Q(x,y) = \frac{x^3}{3a^2}$ et $P(x,y) = \frac{y^3}{3b^2}$

Les fonctions P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$

La courbe fermée entourant D est paramétrée par : $\Gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (a\cos t, b\sin t)$

En appliquant la formule de Green-Riemann

on a $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{(b\sin t)^3}{3b^2}(-a\sin t)dt + \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t)^3}{3a^2} b\cos t dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ab\sin^4 t}{3} dt + \int_0^{2\pi} \frac{ab}{3}\cos^4 t\, dt$$

Or $\sin^4 t + \cos^4 t = \sin^2 t(1-\cos^2 t) + \cos^2 t(1-\sin^2 t)$

$= \sin^2 t - 2\sin^2 t\cos^2 t + \cos^2 t$

$= 1 - 2\sin^2 t\cos^2 t$

$= 1 - 2(\sin t\cos t)^2 = 1 - 2\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)^2$

$= 1 - \frac{\sin^2(2t)}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(4t)}{2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{4}(1-\cos(4t))$

Finalement $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{\cos(4t)}{4}\right)dt$

$= \frac{ab}{3}\left[\left(t-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\frac{\sin(4t)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{ab}{3}\frac{3}{4}(2\pi) = \frac{\pi ab}{2}$

Question 6

Soit $\vec{V}(x,y,z) = (x^2; y^2; z^2)$

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et $x+y+z=1\}$

Calculons le flux de $\vec{V}$ à travers Σ orientée par $\vec{n}$ allant dans le sens des z croissants

* Cherchons une paramétrisation de Σ

De la définition de Σ on en déduit que $(x,y,z) \in [0,1]^3$

Si $x \in [0,1]$ alors $y+z = 1-x$

$\Rightarrow y = 1-x-z \leq 1-x$

Ainsi, on définit $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x, y, 1-x-y)$

où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1-x\}$

Le vecteur normal à cette surface est donné par

$\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Par définition :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Delta} \vec{\nabla}(F(x,y)) \cdot \vec{n}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ (1-x-y)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \left(x^2+y^2+(1-x-y)^2\right) dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\left[x^2 y\right]_{y=0}^{1-x} + \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{1-x} - \left[\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x} \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{3}(\cancel{1-x-1+x})^3 + \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{2}{3}(1-x)^3\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{\cancel{2}}{3}\,\frac{1}{\cancel{4}}(1-x)^4(-1)\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$