

Analyse à Plusieurs Variables

JAD DABAGHI

Enseignant-Chercheur en Mathématiques

jad.dabaghi@devinci.fr

Table des matières

- 1 Différentielle et dérivées partielles
- 2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1
- 3 Fonctions plusieurs fois différentiables
- 4 Extrema locaux
- 5 Formes différentielles de degré un et champs de vecteurs
- 6 Champ de vecteurs
- 7 Changements de coordonnées en dimension 3
- 8 Intégrales doubles
- 9 Intégrales triples
- 10 Intégrales sur des courbes paramétrées
- 11 Intégrales sur des surfaces paramétrées

Fonctions \mathcal{C}^1

Definition

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si f est différentiable et si df est continue, c-a-d si les dérivées partielles de f sont continues.

Propriété

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet des dérivées partielles en tout point et les dérivées partielles sont continues, alors f est de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque : Pour montrer qu'une fonction n'est pas de classe \mathcal{C}^1 , il suffit que l'une de ses dérivées partielles ne soit pas continue ou que la fonction ne soit pas continue.

Exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et elle de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2?$$

Correction :

Exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et elle de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2?$$

Correction :

- Etude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$: la fonction f est une fraction rationnelle donc elle est \mathcal{C}^1 .

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et elle de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2?$$

Correction :

- Etude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$: la fonction f est une fraction rationnelle donc elle est \mathcal{C}^1 .

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Etude de la continuité en $(0,0)$:

$$0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq y^2 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0. \quad \Rightarrow \quad f \text{ continue en } (0,0)$$

- Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- Continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| \leq \frac{2|y|x^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|y| \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$.

Opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 à valeurs réelles

Propriété (Somme, produit, quotient)

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , alors $\lambda f + g$ est de classe \mathcal{C}^1 .
- Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , alors fg est de classe \mathcal{C}^1 .
- Si de plus, g ne s'annule pas sur U , alors $\frac{f}{g}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Propriété (Composition)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R} . Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , alors $g \circ f$ sont de classe \mathcal{C}^1 .

Opération sur les fonctions vectorielles \mathcal{C}^1

Propriété

Soit U une partie de \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^p)$ une application définie par

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

Alors, f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si, les composantes f_i , $i \in \{1, \dots, p\}$ sont \mathcal{C}^1 .

Définition

On appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$, la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p notée $J_f(a)$. Plus précisément, $[J_f(a)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

Exemple

Pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, soit f la fonction définie par $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors,

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Propriété

$f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.

- $\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_i}(a)$ est définie et $\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.
- $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a)$ est définie et $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.
- Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a)$ est définie et on a $\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g(a)^2}$

Composition d'applications \mathcal{C}^1

Propriété

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R}^m . Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. On suppose $f(U) \subset V$. On pose $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ où $h = (h_1, \dots, h_p)$. Soit $a \in U$. Si f admet des dérivées partielles en a et g admet des dérivées partielles en $f(a)$ alors h admet des dérivées partielles en a et

- $\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}$ *Dérivation en chaîne*
- $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

Attention : La notation $\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))$ correspond à la dérivée partielle de g_k par rapport à j -ème variable évaluée en $f(a)$.

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Exemple

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3 \cos(t) \sin(t) + 5 \cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Exemple

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3 \cos(t) \sin(t) + 5 \cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Corrigé :

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Exemple

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3 \cos(t) \sin(t) + 5 \cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Corrigé : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (\sin(t), \cos(t))$. Alors, $h = f \circ \varphi$ vérifie

$$\begin{aligned} h'(t) &= \cos(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\sin(t), \cos(t)) - \sin(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\sin(t), \cos(t)) \\ &= \cos(t)(2 \sin(t) + 3 \cos(t)) - \sin(t)(3 \sin(t) + 10 \cos(t)) \\ &= 3 \cos^2(t) - 3 \sin^2(t) - 8 \cos(t) \sin(t) \end{aligned}$$

Différentiabilité d'ordre 2

Quelques notations : Pour E et F deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F .

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable, et soit $a \in U$.

- 1 On dit que f est *deux fois différentiable* en $a \in U$ si df est différentiable en a et on note $(d^2f)_a = d(df)_a$ et on l'appelle la *différentielle seconde de f en a* .
- 2 On dit que f est *deux fois différentiable sur U* , si elle est deux fois différentiable en tout point $a \in U$ et note d^2f la différentielle seconde de f .

Remarque : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable, $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. De même,

$$d^2f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Fonctions de classe \mathcal{C}^2

Definition

On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Fonctions de classe \mathcal{C}^2

Definition

On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Attention : Si f est \mathcal{C}^2 , alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Fonctions de classe \mathcal{C}^2

Definition

On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Attention : Si f est \mathcal{C}^2 , alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Propriété (Formule de Taylor-Young)

Si f est deux fois différentiable en a , on a un DL à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

Fonctions de classe \mathcal{C}^2

Definition

On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Attention : Si f est \mathcal{C}^2 , alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Propriété (Formule de Taylor-Young)

Si f est deux fois différentiable en a , on a un DL à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

Theorem (Schwartz)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in U$. Si f est deux fois différentiable en a , alors l'application $d^2f_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est symétrique i.e. $d^2f(h, h') = d^2f(h', h)$

Dérivées partielles d'ordre 2

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in U$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a , ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a* . On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{pour } 1 \leq i \neq j \leq n$$

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in U$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a , ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a* . On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{pour } 1 \leq i \neq j \leq n$$

Exemple

$f : (x, y) \mapsto \ln \left(\frac{x}{y} \right)$. Calculez les dérivées partielles premières et secondes de f .

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in U$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a , ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a* . On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{pour } 1 \leq i \neq j \leq n$$

Exemple

$f : (x, y) \mapsto \ln \left(\frac{x}{y} \right)$. Calculez les dérivées partielles premières et secondes de f .

Corrigé : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$.

Definition

Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, avec U un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle *matrice hessienne* de f la matrice des dérivées partielles secondes (lorsqu'elles existent). On la note H_f et on pour $a \in U$:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice hessienne $H_f(a)$ est symétrique.

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Autrement dit

$$(d^2f)_a(h, h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Autrement dit

$$(d^2f)_a(h, h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_n) une base de \mathbb{R}^n .

$$(d^2f)_a(h, h') = (d^2f)_a\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i, \sum_{j=1}^n h'_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h'_j (d^2f)_a(e_i, e_j) = {}^t h H_f(a) h'$$

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Autrement dit

$$(d^2f)_a(h, h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_n) une base de \mathbb{R}^n .

$$(d^2f)_a(h, h') = (d^2f)_a\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i, \sum_{j=1}^n h'_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h'_j (d^2f)_a(e_i, e_j) = {}^t h H_f(a) h'$$

Corollaire (Schwartz)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois différentiable en $a \in U$. Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Extremas locaux

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0 , alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0 . Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0 , alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0 . Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Conclusion :

- 1 Condition nécessaire d'extremum local : Si f admet un minimum local resp. maximum local en x_0 , alors $f''(x_0) \geq 0$, resp. $f''(x_0) \leq 0$.
- 2 Condition suffisante d'extremum local strict : Si $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, alors f admet un minimum local strict, resp. un maximum local strict en x_0 .

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0 , alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0 . Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Conclusion :

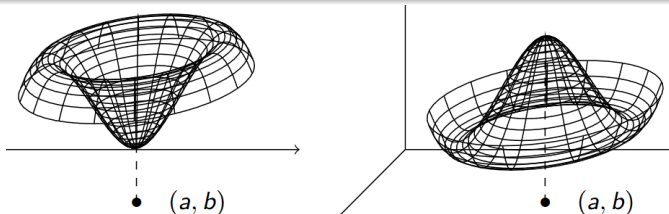
- 1 Condition nécessaire d'extremum local : Si f admet un minimum local resp. maximum local en x_0 , alors $f''(x_0) \geq 0$, resp. $f''(x_0) \leq 0$.
- 2 Condition suffisante d'extremum local strict : Si $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, alors f admet un minimum local strict, resp. un maximum local strict en x_0 .

Comment généraliser ce résultat à plusieurs variables?

Extremas locaux pour une fonction de plusieurs variables

Definition

- 1 f admet un *minimum local*, resp. *maximum local* en a si $\forall x \in \mathcal{V}_a, f(a) \leq f(x)$, resp. $f(a) \geq f(x)$.
- 2 f admet un *extremum local* en a si f admet un minimum local ou un maximum local en a .
- 3 f admet un *minimum local strict*, resp. *maximum local strict* en a si $\forall x \in \mathcal{V}_a$ privé de $a, f(a) < f(x)$, resp. $f(a) > f(x)$.



Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f .

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f .

Corrigé :

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f .

Corrigé : On a

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff (2x - 2, 2y - 2) = (0, 0) \iff (x, y) = (1, 1)$$

Propriété

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 et admet un extremum local en a . Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Propriété

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 et admet un extremum local en a . Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a . Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0.

Propriété

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 et admet un extremum local en a . Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a . Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Alors,

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Propriété

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 et admet un extremum local en a . Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a . Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Alors,

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Or $f(x) \leq f(a) \forall x \in \mathcal{V}_a$. Pour $x = a + te_j$ avec $t \rightarrow 0^+$ on a $f(a + te_j) - f(a) \leq 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = 0^+$$

Pour $x = a + te_j$ avec $t \rightarrow 0^-$ on a $f(a + te_j) - f(a) < 0$ et

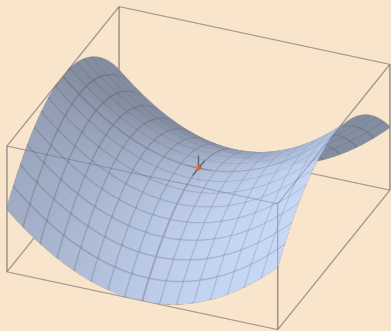
$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = 0^-$$

Conclusion : $\nabla f = 0$

Definition

Soit a un point critique de f . On dit que f admet un *point col* ou un *point selle* en a si

- $\exists v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $t \mapsto f(a + tv_1)$ admet un minimum local strict en $t = 0$
- $\exists v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $t \mapsto f(a + tv_2)$ admet un maximum local strict en $t = 0$.



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$(0, 0)$: point-selle de la fonction

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.*
- Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$*

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.*
- Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$*

Démonstration :

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.
- Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$

Démonstration : Formule de Taylor-Young :

$0 \leq f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{=} df_a(h) + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$. Pour $h = tv$ où $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $t > 0$ petit on trouve

$$0 \leq \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{2} v^T d^2 f_a(v, v) v + o(1).$$

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- Si a est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie positive ($h^T H_f(a) h > 0$), alors f admet un minimum local strict en a .
- Si a est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie négative ($h^T H_f(a) h < 0$), alors f admet un maximum local strict en a .

Démonstration : Puisque a est un point critique, la formule de Taylor-Young donne

$$f(a + h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^T H_f(a) h > 0.$$

Donc f admet un minimum local strict en a .

Cas pratique $n = 2$

Corollaire

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. On suppose que a est un point critique de f . On note :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \quad \text{et} \quad H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \quad \delta = \det(H_f(a)) = rt - s^2.$$

- Si $\delta > 0$ et $r > 0$ alors $H_f(a)$ est définie positive et f a un minimum local strict en a .
- Si $\delta > 0$ et $r < 0$ alors $H_f(a)$ est définie négative et f a un maximum local strict en a .
- Si $\delta < 0$ alors f présente un point selle en a , et donc n'a pas d'extremum en a .

Remarque : Si $\delta = 0$ alors on ne peut pas conclure sur la présence ou non d'un extremum de f en a par cette méthode.

Exemple

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Exemple

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \underbrace{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)}_{\text{points critiques}}.$$

Exemple

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \underbrace{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)}_{\text{points critiques}}.$$

- Etude de la hessienne en les points critiques

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad \det(H_f)(x, y) = 144x^2y^2 - 16$$

Exemple

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \underbrace{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)}_{\text{points critiques}}.$$

- Etude de la hessienne en les points critiques

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad \det(H_f)(x, y) = 144x^2y^2 - 16$$

- Pour $(x, y) = (0, 0)$, $\delta = -16 < 0$ donc $(0, 0)$ est un point selle.
- Pour $(x, y) = (1, 1)$, $\delta = 128 > 0$ et $r = 12 > 0$ donc $(1, 1)$ est un minimum local.
- Pour $(x, y) = (-1, -1)$, $\delta = 128$ et $r = 12$ donc $(-1, -1)$ est un minimum local.

Formes différentielles de degré 1

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Rappel :

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .
- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $dx_i : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, qui à $a \in U$ associe la fonction $(dx_i)_a$, elle-même définie par $(dx_i)_a(h_1, \dots, h_n) = h_i$.

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Rappel :

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .
- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $dx_i : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, qui à $a \in U$ associe la fonction $(dx_i)_a$, elle-même définie par $(dx_i)_a(h_1, \dots, h_n) = h_i$.

Definition

On appelle *1-forme différentielle* sur $U \subset \mathbb{R}^n$ une application $C^k : \omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Rappel :

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .
- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $dx_i : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, qui à $a \in U$ associe la fonction $(dx_i)_a$, elle-même définie par $(dx_i)_a(h_1, \dots, h_n) = h_i$.

Definition

On appelle *1-forme différentielle* sur $U \subset \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^k : \omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Ainsi, toute application $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique

$$\omega(M) = \sum_{j=1}^n P_j(M) e_j^* = \sum_{j=1}^n P_j(M) dx_j$$

Theorem

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k . Alors $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une forme différentielle de degré 1 et de classe \mathcal{C}^{k-1} . De plus, pour tout $M \in U$

$$df_M = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j$$

Theorem

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k . Alors $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une forme différentielle de degré 1 et de classe \mathcal{C}^{k-1} . De plus, pour tout $M \in U$

$$df_M = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j$$

Definition

On dit qu'une 1-forme différentielle est exacte s'il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{k+1} telle que $\omega = df$.

Theorem

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k . Alors $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une forme différentielle de degré 1 et de classe C^{k-1} . De plus, pour tout $M \in U$

$$df_M = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j$$

Definition

On dit qu'une 1-forme différentielle est exacte s'il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k+1} telle que $\omega = df$.

Conséquence : Ainsi, si $\omega : M \in U \mapsto \sum_{j=1}^n P_j(M) dx_j$ alors ω est exacte ssi il existe f de

classe C^{k+1} tq $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Dans ce cas, f est appelée une primitive de ω .

Remarque : En dimension 1, les primitives d'une fonction sont définies à une constante près. Comment généraliser ce résultat pour les fonctions à plusieurs variables?

Theorem

Soit U un ouvert. On suppose que $\forall (x, y) \in U$, il existe un chemin de classe \mathcal{C}^1 dans U reliant x et y , c'est-à-dire une fonction $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe \mathcal{C}^1 . Si $df = 0$ alors f est constante.

Preuve :

- 1 Soit $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^1 . On a $\varphi(0) = f(\gamma(0)) = f(x)$ et $\varphi(1) = f(\gamma(1)) = f(y)$.
- 2 on a $\varphi'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$. Donc φ est constante, donc $\varphi(0) = \varphi(1)$, donc $f(x) = f(y)$.
- 3 Comme ceci est vrai pour tous x et y dans U , f est constante.

Propriété

On suppose que pour tous $(x, y) \in U$, il existe un chemin de classe C^1 dans U reliant x et y , c'est-à-dire une fonction $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soit ω une 1-forme différentielle sur U . S'il existe f une primitive de ω sur U , alors les autres primitives de ω sont les fonctions de la forme $f + c$ où c est une constante.

Preuve :

- 1 Soit g une primitive de ω . Alors $\omega = dg$.
- 2 Or f est une primitive de ω donc $dg = df$. Puis $d(g - f) = 0$
- 3 D'après le Théorème précédent, $g - f = c$ où c est une constante.

Conditions d'existence de primitives

Théorème de Schwarz : \Rightarrow condition nécessaire d'existence de primitives.

Theorem

Soit $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une forme différentielle de classe \mathcal{C}^k avec $w(M) = \sum_{j=1}^n P_j(M)dx_j$. Si ω est exacte, alors $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall M \in U$,

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(M)$$

Preuve :

① ω est exacte $\Rightarrow \omega = df$ et $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ et $P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

② Théorème de Schwarz $\Rightarrow \forall M \in U, \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M) = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(M)$.

Definition

Une 1-forme différentielle $\omega = \sum_{j=1}^n P_j dx_j$ de classe C^k ($k \geq 1$) telle que

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{est dite fermée.}$$

Definition

Une 1-forme différentielle $\omega = \sum_{j=1}^n P_j dx_j$ de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) telle que

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{est dite fermée.}$$

Example

Montrer que la forme différentielle $d\theta$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ par

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{est fermée.}$$

Definition

Une 1-forme différentielle $\omega = \sum_{j=1}^n P_j dx_j$ de classe C^k ($k \geq 1$) telle que

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{est dite fermée.}$$

Exemple

Montrer que la forme différentielle $d\theta$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ par

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{est fermée.}$$

Corrigé : On a

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Attention : Il existe des fonctions fermées non exactes.

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Attention : Il existe des fonctions fermées non exactes.

Sur quels types d'ouverts, a t-on l'équivalence forme différentielle exacte \iff forme différentielle fermée?

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Attention : Il existe des fonctions fermées non exactes.

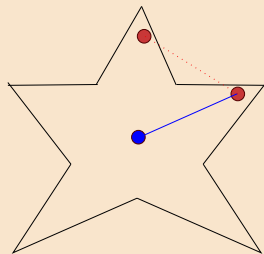
Sur quels types d'ouverts, a t-on l'équivalence forme différentielle exacte \iff forme différentielle fermée?

Definition

Une partie A de \mathbb{R}^n est dite *étoilée* par rapport à un point $a_0 \in A$, alors appelé *centre* de A , si $\forall a \in A$, le segment

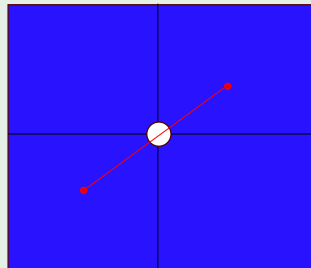
$$[a_0, a] = \{ta_0 + (1 - t)a \mid t \in [0, 1]\}$$

est inclus dans A .



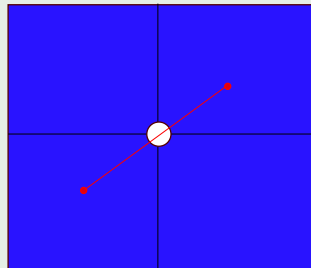
Exemple

- \mathbb{R}^2 est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 .
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 .



Exemple

- \mathbb{R}^2 est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 .
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 .



Theorem (Poincaré)

Soit U un ouvert étoilé de \mathbb{R}^n . Alors toute 1-forme différentielle fermée sur U est exacte. De plus, si ω est une 1-forme différentielle sur U et f est une primitive de ω , alors les primitives de ω sont les fonctions de la forme $f + \text{constante}$.

Exemple

- 1 On considère sur \mathbb{R}^2 la forme différentielle $\omega = y \, dx - x \, dy$. La forme différentielle ω est-elle exacte?
- 2 Soit $\omega = (x^3 + y) \, dx + (x + 2y) \, dy$ sur \mathbb{R}^2 . La forme ω est-elle exacte? Calculez une primitive f de ω .

Corrigé :

- 1 On a $\omega = u_x dx + u_y dy$ avec $u_x(x, y) = y$ et $u_y(x, y) = -x$. De plus,

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Ainsi, ω n'est pas exacte.

- 2 On a $\omega = u_x dx + u_y dy$ avec $u_x(x, y) = x^3 + y$ et $u_y(x, y) = x + 2y$. On a $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 1 = \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc ω est fermée sur \mathbb{R}^2 . Comme \mathbb{R}^2 est étoilé, ω est exacte.

Cherchons une primitive f de ω . On cherche donc f telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y \end{cases} \quad (2) \quad \xLeftrightarrow{\int_x} f(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy + \alpha(y) \quad \xLeftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \alpha'(y) \stackrel{(2)}{=} x + 2y$$

Donc $\alpha(y) = y^2 + k$.

Ainsi, les primitives de ω sont de la forme

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy + y^2 + k.$$

Facteur intégrant

Facteur intégrant

Definition

Si ω est une 1-forme différentielle sur U et $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 non nulle, on dit que μ est un facteur intégrant pour ω si $\mu\omega$ est exacte.

Facteur intégrant

Definition

Si ω est une 1-forme différentielle sur U et $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 non nulle, on dit que μ est un facteur intégrant pour ω si $\mu\omega$ est exacte.

Remarque : Lorsqu'une forme n'est pas exacte, existe-il existe un facteur intégrant?

Facteur intégrant

Definition

Si ω est une 1-forme différentielle sur U et $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 non nulle, on dit que μ est un facteur intégrant pour ω si $\mu\omega$ est exacte.

Remarque : Lorsqu'une forme n'est pas exacte, existe-il existe un facteur intégrant?

Example

Considérons la forme différentielle $\omega = yzdx + dy + dz$ sur \mathbb{R}^2 .

- 1 Est-elle exacte?
- 2 Existe-il un facteur intégrant?

Corrigé :

① $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.

② Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

Corrigé :

① $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.

② Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x, y, z) yz \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial C}{\partial x} \quad \mu(x, y, z) \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial C}{\partial y} \quad \mu(x, y, z) \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial C}{\partial z}$

Corrigé :

① $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.

② Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x, y, z)yz \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial C}{\partial x}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial C}{\partial y}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial C}{\partial z}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x, y, z) \stackrel{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y}$

Corrigé :

① $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.

② Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x, y, z) yz \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial C}{\partial x}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial C}{\partial y}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial C}{\partial z}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z \mu(x, y, z) \stackrel{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} yz + y \mu(x, y, z) \stackrel{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z \mu(x, y, z)$

Corrigé :

① $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.

② Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x, y, z) yz \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial C}{\partial x}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial C}{\partial y}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial C}{\partial z}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x, y, z) \stackrel{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x, y, z) \stackrel{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x, y, z)$
- $\frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x, y, z) = \frac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x, y, z) \Rightarrow \mu = 0$

Corrigé :

① $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.

② Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x, y, z) yz \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial C}{\partial x}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial C}{\partial y}$ $\mu(x, y, z) \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial C}{\partial z}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x, y, z) \stackrel{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x, y, z) \stackrel{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x, y, z)$
- $\frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x, y, z) = \frac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x, y, z) \Rightarrow \mu = 0$
- **Conclusion :** Il n'existe donc pas de facteur intégrant.

Champ de vecteurs

Definition

Un champ de vecteurs sur un ouvert U est une fonction de U dans \mathbb{R}^n . En pratique on considérera des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 .

Champ de vecteurs

Definition

Un champ de vecteurs sur un ouvert U est une fonction de U dans \mathbb{R}^n . En pratique on considérera des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 .

Il y a une équivalence entre les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles, définie comme suit : à une forme différentielle $\omega = u_1 dx_1 + \dots + u_n dx_n$ correspond le

champ de vecteurs $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, qui à $(x_1, \dots, x_n) \in U$ associe $\begin{pmatrix} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$.

Champ de vecteurs

Definition

Un champ de vecteurs sur un ouvert U est une fonction de U dans \mathbb{R}^n . En pratique on considérera des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 .

Il y a une équivalence entre les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles, définie comme suit : à une forme différentielle $\omega = u_1 dx_1 + \dots + u_n dx_n$ correspond le

champ de vecteurs $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, qui à $(x_1, \dots, x_n) \in U$ associe $\begin{pmatrix} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$.

Notation : On appelle *nabla*, l'opérateur $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

Gradient et potentiels scalaires

Definition

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On appelle *gradient* de f en a et on note $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$, ou le vecteur de \mathbb{R}^n définit par :

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Gradient et potentiels scalaires

Definition

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On appelle *gradient* de f en a et on note $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$, ou le vecteur de \mathbb{R}^n définit par :

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Remarque : Le gradient d'une fonction caractérise la variabilité de la fonction au voisinage d'un point. Dans un repère orthonormé, si le vecteur gradient n'est pas nul, alors il pointe dans la direction où la fonction croît le plus rapidement, et sa norme est égale au taux de croissance dans cette direction.

Example

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

Corrigé :

Alors $\vec{\nabla} f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

Corrigé :

Alors $\vec{\nabla} f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Comment relier la différentielle au gradient ?

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

Corrigé :

Alors $\vec{\nabla} f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Comment relier la différentielle au gradient ?

Propriété

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Pour tout $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$df_a(v) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Quelques propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions différentiables sur U à valeurs dans \mathbb{R} .

- 1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}f + \overrightarrow{\text{grad}}g$
- 2 $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}g + g \overrightarrow{\text{grad}}f$

Démonstration :

Quelques propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions différentiables sur U à valeurs dans \mathbb{R} .

- 1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}f + \overrightarrow{\text{grad}}g$
- 2 $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}g + g \overrightarrow{\text{grad}}f$

Démonstration :

- 1 Par définition

$$\nabla(\lambda f + g) = \left(\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_n} \right) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$$

Quelques propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions différentiables sur U à valeurs dans \mathbb{R} .

- 1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}f + \overrightarrow{\text{grad}}g$
- 2 $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}g + g \overrightarrow{\text{grad}}f$

Démonstration :

- 1 Par définition

$$\nabla(\lambda f + g) = \left(\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_n} \right) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$$

- 2

$$\nabla(fg) = \left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(fg)}{\partial x_n} \right) = \left(f \frac{\partial g}{\partial x_1} + g \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, f \frac{\partial g}{\partial x_n} + g \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = f \nabla g + g \nabla f$$

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . On dit que \vec{V} est un *champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe \mathcal{C}^2 sur U telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f. \quad f \text{ est alors appelée un } \textit{potentiel scalaire} \text{ de } \vec{V}.$$

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . On dit que \vec{V} est un *champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe \mathcal{C}^2 sur U telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f. \quad f \text{ est alors appelée un } \textit{potentiel scalaire} \text{ de } \vec{V}.$$

Exemple

Montrons que $\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{e}_x + (x^2 + z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ est un champ de gradients.

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . On dit que \vec{V} est un *champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe \mathcal{C}^2 sur U telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f. \quad f \text{ est alors appelée un } \textit{potentiel scalaire} \text{ de } \vec{V}.$$

Exemple

Montrons que $\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{e}_x + (x^2 + z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ est un champ de gradients.

Corrigé : On cherche f de classe \mathcal{C}^2 tel que $\vec{v} = \nabla f$.

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . On dit que \vec{V} est un *champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe \mathcal{C}^2 sur U telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f. \quad f \text{ est alors appelée un } \textit{potentiel scalaire} \text{ de } \vec{V}.$$

Exemple

Montrons que $\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{e}_x + (x^2 + z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ est un champ de gradients.

Corrigé : On cherche f de classe \mathcal{C}^2 tel que $\vec{v} = \nabla f$.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x f = 2xy \\ \partial_y f = x^2 + z \\ \partial_z f = y \end{cases} \iff f(x, y, z) = x^2y + zy + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Opérateur divergence

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de \vec{V}* en a le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \vec{V}(a) = \nabla \cdot \vec{V}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Opérateur divergence

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de \vec{V} en a* le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \vec{V}(a) = \nabla \cdot \vec{V}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Interprétation : L'opérateur divergence mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace.

Opérateur divergence

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de \vec{V} en a* le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \vec{V}(a) = \nabla \cdot \vec{V}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Interprétation : L'opérateur divergence mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace. **Illustration en mécanique des fluides :**

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho(x, t) \vec{V}) = 0 \quad \rho : \text{masse volumique du fluide en } (x, t) \text{ et } \vec{V} \text{ la vitesse d'un}$$

Opérateur divergence

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de \vec{V} en a* le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \vec{V}(a) = \nabla \cdot \vec{V}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Interprétation : L'opérateur divergence mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace. **Illustration en mécanique des fluides :**

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho(x, t) \vec{V}) = 0 \quad \rho : \text{masse volumique du fluide en } (x, t) \text{ et } \vec{V} \text{ la vitesse d'un}$$

écoulement incompressible : $\rho = \text{cste} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. La divergence va mesurer localement les variations de densité de flux.

Exemple

Pour $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2xy + \sin(x), x^2y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$. On a :

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y) = 2y + \cos(x) + x^2.$$

Exemple

Pour $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2xy + \sin(x), x^2y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$. On a :

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y) = 2y + \cos(x) + x^2.$$

Propriété

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , \vec{V}, \vec{W} des champs de vecteurs de classe C^1 sur U , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ① On a $\operatorname{div}(\lambda \vec{V} + \vec{W}) = \lambda \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{div} \vec{W}$.
- ② Pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 : $\operatorname{div}(f \vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div} \vec{V}$.

Exemple

Pour $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2xy + \sin(x), x^2y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$. On a :

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y) = 2y + \cos(x) + x^2.$$

Propriété

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , \vec{V}, \vec{W} des champs de vecteurs de classe C^1 sur U , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ① On a $\operatorname{div}(\lambda \vec{V} + \vec{W}) = \lambda \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{div} \vec{W}$.
- ② Pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 : $\operatorname{div}(f \vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div} \vec{V}$.

Démonstration : Utiliser la définition de l'opérateur divergence et sa linéarité.

Rotationnel et potentiel vecteur

Definition

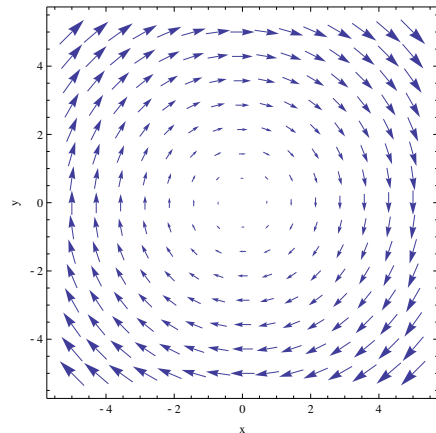
Soit $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *rotationnel de \vec{V}* en a , et on note $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(a)$, le vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y}(a) - \frac{\partial V_y}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial V_x}{\partial z}(a) - \frac{\partial V_z}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial V_y}{\partial x}(a) - \frac{\partial V_x}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Si \vec{V} est différentiable sur U , on appelle *rotationnel de \vec{V}* le champ de vecteurs qui à a associe $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(a)$.

Illustration

- Le rotationnel d'un champ vectoriel exprime la tendance qu'ont les lignes de champ du champ vectoriel considéré à tourner autour d'un point.
- Dans une tornade, le vent tourne autour de l'oeil du cyclone et le champ vectoriel vitesse du vent a un rotationnel non nul autour de l'oeil.
- Le rotationnel de ce champ de vitesse est lié aussi au vecteur tourbillon noté généralement $\vec{\Omega}$ du champs de vitesse par la relation $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$. Le tourbillon est d'autant plus intense que l'on est proche de l'oeil du cyclone.



Exemple

Pour $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $\vec{V}(x, y, z) = (xyz, 2x + 3yz, e^{xyz})$, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(x, y, z) = (xze^{xyz} - 3y, xy - yze^{xyz}, 2 - xz).$$

Exemple

Pour $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $\vec{V}(x, y, z) = (xyz, 2x + 3yz, e^{xyz})$, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(x, y, z) = (xze^{xyz} - 3y, xy - yze^{xyz}, 2 - xz).$$

Propriété

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 et \vec{V}, \vec{W} des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur U , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

① $\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda \vec{V} + \vec{W}) = \lambda \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W}.$

② Pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{V}) = (\overrightarrow{\text{grad}} f) \wedge \vec{V} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$$

③ Si de plus, f est de classe \mathcal{C}^2 sur U

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0$$

Definition

On dit que $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ *dérive d'un potentiel vecteur* ou *est un champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs \vec{A} appelé *potentiel vecteur* de \vec{V} tel que $\vec{V} = \text{rot } \vec{A}$.

Definition

On dit que $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ *dérive d'un potentiel vecteur* ou est un *champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs \vec{A} appelé *potentiel vecteur* de \vec{V} tel que $\vec{V} = \text{rot } \vec{A}$.

Propriété

Soit U un ouvert étoilé de \mathbb{R}^3 . Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 . Alors

- ① \vec{V} *dérive d'un potentiel scalaire* si et seulement si $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$.
- ② \vec{V} *dérive d'un potentiel vecteur* $\Leftrightarrow \text{div } \vec{V} = 0$.
- ③ Si f est un *potentiel scalaire* de \vec{V} , les *potentiels scalaires* de \vec{V} sont les fonctions de la forme $f + \text{constante}$.
- ④ Si \vec{A} est un *potentiel vecteur* de \vec{V} , les *potentiels vecteurs* de \vec{V} sont les fonctions de la forme $\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f$ où f est une fonction de classe C^2 .

Exemple

Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2yz \\ 2z(x + 3y) \\ y(2x + 3y) + 2z \end{pmatrix}$ sur \mathbb{R}^3 .

On peut vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$. Par conséquent, \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire. Calculons un potentiel scalaire f de V . On cherche $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2yz \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xz + 6yz \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xy + 3y^2 + 2z \end{cases}$$

Donc les potentiels de \vec{V} sont les fonctions de la forme $f(x, y, z) = 2xyz + 3y^2z + z^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Expression des opérateurs dans les bases cylindriques et sphériques

Propriété (Coordonnées cylindriques)

Si f est une fonction de (r, θ, z) :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Pour \vec{V} un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \text{rot} \vec{V} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Propriété (Coordonnées sphériques)

Si f est une fonction de (r, θ, φ)

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \nabla \cdot \vec{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Motivation

Dans cette section, on s'intéresse à définir et calculer des intégrales sur des certains domaines bornés de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

- Une *intégrale double* est une intégrale sur une partie D de \mathbb{R}^2 , notée $\iint_D f$ ou $\iint_D f(x,y)dx dy$.
- Une *intégrale triple* est une intégrale sur une partie D de \mathbb{R}^3 , notée $\iiint_D f$ ou $\iiint_D f(x,y,z)dx dy dz$.

Applications à des calculs d'aires, de volumes, ou encore de probabilités?

Definition

On appelle *rectangle* ou *pavé* de \mathbb{R}^2 un produit de segments $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, où a, b, c, d sont des réels et $a < b, c < d$.

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un pavé de \mathbb{R}^2 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors les fonctions

$$x \in [a, b] \mapsto \int_c^d f(x, y) dy \in \mathbb{R}$$

$$y \in [c, d] \mapsto \int_a^b f(x, y) dx \in \mathbb{R}$$

sont continues.

Definition

On appelle *rectangle* ou *pavé* de \mathbb{R}^2 un produit de segments $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, où a, b, c, d sont des réels et $a < b, c < d$.

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un pavé de \mathbb{R}^2 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors les fonctions

$$x \in [a, b] \mapsto \int_c^d f(x, y) dy \in \mathbb{R}$$

$$y \in [c, d] \mapsto \int_a^b f(x, y) dx \in \mathbb{R}$$

sont continues.

Rappel : en dimension 1, f continue $\Rightarrow \int_0^x f(t) dt$ continue

Theorem (Fubini)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\iint_D f(x,y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

Theorem (Fubini)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\iint_D f(x,y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

Example

Soit $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y$. Calculer $\iint_D f(x,y) dx dy$.

Theorem (Fubini)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\iint_D f(x,y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

Example

Soit $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y$. Calculer $\iint_D f(x,y) dx dy$.

Corrigé :

Theorem (Fubini)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\iint_D f(x,y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

Example

Soit $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y$. Calculer $\iint_D f(x,y) dx dy$.

Corrigé : Intégrons d'abord par rapport à y puis par rapport à x :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 1.$$

Exemple

Soit $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$. Calculer $I = \iint f(x, y) dx dy$.

Exemple

Soit $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$. Calculer $I = \iint f(x, y) dx dy$.

1

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x+y} dy \right) dx = \int_0^1 [\ln(1+x+y)]_0^1 dx = \int_0^1 (\ln(2+x) - \ln(1+x)) dx$$

Exemple

Soit $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$. Calculer $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

1

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x+y} dy \right) dx = \int_0^1 [\ln(1+x+y)]_0^1 dx = \int_0^1 (\ln(2+x) - \ln(1+x)) dx$$

2 Changement de variables : $z = 2 + x$ puis $z = 1 + x$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_2^3 \ln(z) dz - \int_1^2 \ln(z) dz = [z \ln(z) - z]_2^3 - [z \ln(z) - z]_1^2$$

Exemple

Soit $D = [0, 1] \times [0, 1]$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$. Calculer $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

1

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x+y} dy \right) dx = \int_0^1 [\ln(1+x+y)]_0^1 dx = \int_0^1 (\ln(2+x) - \ln(1+x)) dx$$

2 Changement de variables : $z = 2 + x$ puis $z = 1 + x$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_2^3 \ln(z) dz - \int_1^2 \ln(z) dz = [z \ln(z) - z]_2^3 - [z \ln(z) - z]_1^2$$

3 Conclusion :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = [z \ln(z) - z]_2^3 - [z \ln(z) - z]_1^2 = 3 \ln(3) - 4 \ln(2)$$

Séparation des variables

Séparation des variables

Propriété

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un pavé de \mathbb{R}^2 et f une fonction C^0 sur D . On suppose que f vérifie $f(x, y) = g(x)h(y) \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, où $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^0 . Alors,

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Séparation des variables

Propriété

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un pavé de \mathbb{R}^2 et f une fonction \mathcal{C}^0 sur D . On suppose que f vérifie $f(x, y) = g(x)h(y) \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, où $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sont \mathcal{C}^0 . Alors,

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Démonstration :

Séparation des variables

Propriété

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un pavé de \mathbb{R}^2 et f une fonction C^0 sur D . On suppose que f vérifie $f(x, y) = g(x)h(y) \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, où $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^0 . Alors,

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D g(x)h(y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right) \end{aligned}$$

Example

Soit $D = [0, 1] \times [0, 2]$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x+2y} = e^x e^{2y}$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Exemple

Soit $D = [0, 1] \times [0, 2]$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x+2y} = e^x e^{2y}$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Corrigé :

Exemple

Soit $D = [0, 1] \times [0, 2]$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x+2y} = e^x e^{2y}$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Corrigé :

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D e^{x+2y} dx dy = \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^2 e^{2y} dy \right) \\ &= [e^x]_0^1 \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1)(e^4 - 1).\end{aligned}$$

Définition sur un domaine élémentaire

Définition sur un domaine élémentaire

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est appelée *une partie élémentaire* ou *un domaine élémentaire* de \mathbb{R}^2 si

- ❶ $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et des fonctions $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- ❷ $\exists(c, d) \in \mathbb{R}^2$ et des fonctions $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\psi_1 \leq \psi_2$ et

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

Définition sur un domaine élémentaire

Definition

Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est appelée *une partie élémentaire* ou *un domaine élémentaire* de \mathbb{R}^2 si

- ① $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et des fonctions $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- ② $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$ et des fonctions $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\psi_1 \leq \psi_2$ et

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

Remarque : Un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est un cas particulier de domaine élémentaire : si $D = [a, b] \times [c, d]$, on peut prendre $\varphi_1 = c, \varphi_2 = d, \psi_1 = a, \psi_2 = b$.

Propriété

On suppose que D est un domaine élémentaire. Supposons que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Alors les fonctions

$$x \in [a, b] \mapsto \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in [c, d] \mapsto \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \in \mathbb{R}$$

sont continues.

Propriété

On suppose que D est un domaine élémentaire. Supposons que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Alors les fonctions

$$x \in [a, b] \mapsto \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in [c, d] \mapsto \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \in \mathbb{R}$$

sont continues.

Theorem (Fubini)

Soit D un domaine élémentaire et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Exemple

On considère le triangle ABC où $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(0, -1)$. On pose $D = ABC$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + 2y$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Exemple

On considère le triangle ABC où $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(0, -1)$. On pose $D = ABC$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + 2y$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Méthodologie :

Exemple

On considère le triangle ABC où $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(0, -1)$. On pose $D = ABC$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + 2y$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Méthodologie :

- 1 On dessine le triangle (pas obligatoire mais recommandé)

Exemple

On considère le triangle ABC où $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(0, -1)$. On pose $D = ABC$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + 2y$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Méthodologie :

- 1 On dessine le triangle (pas obligatoire mais recommandé)
- 2 On vérifie que D constitue un domaine élémentaire c-a-d on identifie les réels $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et on cherche les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ tel que

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

Exemple

On considère le triangle ABC où $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(0, -1)$. On pose $D = ABC$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + 2y$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Méthodologie :

- 1 On dessine le triangle (pas obligatoire mais recommandé)
- 2 On vérifie que D constitue un domaine élémentaire c-a-d on identifie les réels $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et on cherche les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ tel que

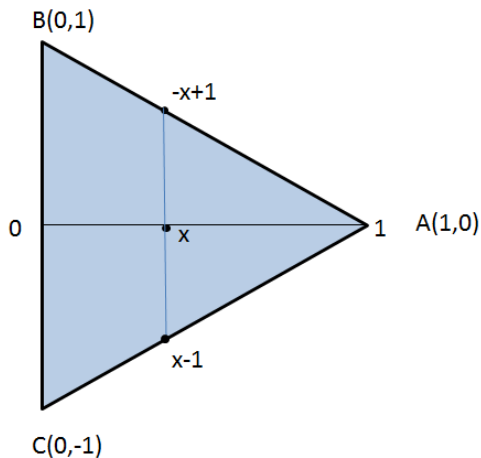
$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

- 3 On calcule les intégrales

Corrigé :

Corrigé :

1 Illustration géométrique



2 Montrons que D est un domaine élémentaire

2 Montrons que D est un domaine élémentaire

On a

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 1 - x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \min(1 - y, 1 + y)\} \end{aligned}$$

2 Montrons que D est un domaine élémentaire

On a

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 1 - x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \min(1 - y, 1 + y)\} \end{aligned}$$

3 Calcul de l'intégrale sur D :

2 Montrons que D est un domaine élémentaire

On a

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 1 - x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \min(1 - y, 1 + y)\} \end{aligned}$$

3 Calcul de l'intégrale sur D :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{x-1}^{1-x} (x + 2y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[xy + y^2 \right]_{x-1}^{1-x} dx \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Propriétés de l'intégrale double

Propriété

- 1 Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\iint_D (\lambda f + g)(x, y) \, dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) \, dx dy + \iint_D g(x, y) \, dx dy \quad (\text{Linéarité})$$

- 2 Soit $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $h \geq 0$. Alors

$$\iint_D h(x, y) \, dx dy \geq 0 \quad (\text{Positivité})$$

- 3 Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que $f \leq g$. Alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy \quad (\text{Croissance})$$

C^1 -difféomorphisme et inversion globale

\mathcal{C}^1 -difféomorphisme et inversion globale

Definition

Soient U, V des ouverts de \mathbb{R}^2 . On appelle \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V une application bijective de U sur V de classe \mathcal{C}^1 dont la réciproque est de classe \mathcal{C}^1 .

\mathcal{C}^1 -difféomorphisme et inversion globale

Definition

Soient U, V des ouverts de \mathbb{R}^2 . On appelle \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V une application bijective de U sur V de classe \mathcal{C}^1 dont la réciproque est de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque : Si φ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, il est licite de construire la matrice Jacobienne de φ en $a \in \mathbb{R}^2$ quelconque

$$J_{\varphi(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

\mathcal{C}^1 -difféomorphisme et inversion globale

Definition

Soient U, V des ouverts de \mathbb{R}^2 . On appelle \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V une application bijective de U sur V de classe \mathcal{C}^1 dont la réciproque est de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque : Si φ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, il est licite de construire la matrice Jacobienne de φ en $a \in \mathbb{R}^2$ quelconque

$$J_{\varphi(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Peut-on utiliser un changement de variable pour le calcul d'une intégrale double?

Theorem (inversion globale)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , injective, tq $\forall a \in U, \det(J_\varphi(a)) \neq 0$, i.e. l'application $d\varphi_a$ est inversible. Alors φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

Theorem (inversion globale)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , injective, tq $\forall a \in U, \det(J_\varphi(a)) \neq 0$, i.e. l'application $d\varphi_a$ est inversible. Alors φ est un C^1 -difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

Propriété (Changement de variable)

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 et φ un C^1 -difféomorphisme de U sur V . Soient Ω et D des domaines élémentaires de \mathbb{R}^2 tels que $\varphi(\Omega) = D$. Alors, pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, continue on a

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_\Omega (f \circ \varphi)(u, v) |\det(J_\varphi(u, v))| \, du dv.$$

Theorem (inversion globale)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , injective, tq $\forall a \in U, \det(J_\varphi(a)) \neq 0$, i.e. l'application $d\varphi_a$ est inversible. Alors φ est un C^1 -difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

Propriété (Changement de variable)

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 et φ un C^1 -difféomorphisme de U sur V . Soient Ω et D des domaines élémentaires de \mathbb{R}^2 tels que $\varphi(\Omega) = D$. Alors, pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, continue on a

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_\Omega (f \circ \varphi)(u, v) |\det(J_\varphi(u, v))| \, du dv.$$

Rappel : Pour $d = 1$ on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^1 f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ pour $(x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ pour $(x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

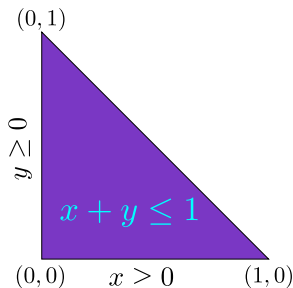
Corrigé :

Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ pour $(x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Corrigé :

1 Illustration géométrique



2 Identification du \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

2 Identification du \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))\end{aligned}$$

2 Identification du \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))\end{aligned}$$

L'application φ est \mathcal{C}^1 sur D car ses composantes φ_1 et φ_2 sont \mathcal{C}^1 . De plus

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_\varphi(u, v)) = \frac{1}{2}$$

2 Identification du \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))\end{aligned}$$

L'application φ est \mathcal{C}^1 sur D car ses composantes φ_1 et φ_2 sont \mathcal{C}^1 . De plus

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_\varphi(u, v)) = \frac{1}{2}$$

Ainsi, φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V .

3 Déterminons l'inverse de φ .

$$\varphi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u+v}{2} = x \\ \frac{v-u}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow \varphi^{-1}(u, v) = (u-v, u+v)$$

3 Déterminons l'inverse de φ .

$$\varphi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u+v}{2} = x \\ \frac{v-u}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow \varphi^{-1}(u, v) = (u-v, u+v)$$

4 Identification de Ω tel que $\varphi(\Omega) = D$.

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\}$$

3 Déterminons l'inverse de φ .

$$\varphi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u+v}{2} = x \\ \frac{v-u}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow \varphi^{-1}(u, v) = (u-v, u+v)$$

4 Identification de Ω tel que $\varphi(\Omega) = D$.

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\}$$

5 Formule du changement de variables :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} (f \circ \varphi)(u, v) |\det(J_{\varphi}(u, v))| du dv = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (f \circ \varphi)(u, v) du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \exp\left(\frac{u}{v}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-v}^v \exp\left(\frac{u}{v}\right) du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[v \exp\left(\frac{u}{v}\right) \right]_{-v}^v dv = \frac{1}{2} \int_0^1 v \left(e - \frac{1}{e} \right) dv = \frac{1}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

Changement de variables en coordonnées polaires

On considère l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).\end{aligned}$$

Alors, Φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ sur \mathbb{R}^2 . De plus, $\det(J_\Phi(r, \theta)) = r$.

Changement de variables en coordonnées polaires

On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Alors, Φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ sur \mathbb{R}^2 . De plus, $\det(J_\Phi(r, \theta)) = r$.

Propriété

Soit D un domaine élémentaire de \mathbb{R}^2 tq $D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r \leq \rho(\theta)\}$ où $-\pi \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ et $\rho : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue, 2π -périodique. Alors on a, pour une fonction f continue sur D ,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=0}^{\rho(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 0, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$. D est un quart du disque fermé de centre $(1, 0)$ et de rayon 2. Soit $f(x, y) = e^{(x-1)^2 + y^2}$. Calculer $\iint_D f$.

Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 0, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$. D est un quart du disque fermé de centre $(1, 0)$ et de rayon 2. Soit $f(x, y) = e^{(x-1)^2 + y^2}$. Calculer $\iint_D f$.

Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 0, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$. D est un quart du disque fermé de centre $(1, 0)$ et de rayon 2. Soit $f(x, y) = e^{(x-1)^2 + y^2}$. Calculer $\iint_D f$.

1 Changement de variables affine

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) = (1 + u, v)$$

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\det(J_\varphi(u, v)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Cela prouve que l'application φ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme.

Exemple

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$. D est un quart du disque fermé de centre $(1, 0)$ et de rayon 2. Soit $f(x, y) = e^{(x-1)^2 + y^2}$. Calculer $\iint_D f$.

1 Changement de variables affine

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) = (1 + u, v)$$

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\det(J_\varphi(u, v)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Cela prouve que l'application φ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme.

2 Identification du domaine de référence. On cherche D_0 tq $\varphi(D_0) = D$.

$$D_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0, v \geq 0, u^2 + v^2 \leq 4\}$$

3 Formule du changement de variables

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{D_0} e^{u^2+v^2} du dv$$

3 Formule du changement de variables

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{D_0} e^{u^2+v^2} du dv$$

4 Changement de variable en coordonnées polaires :

$$\Phi(r, \theta) = (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \Rightarrow \det(J_\Phi(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

L'application Φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

3 Formule du changement de variables

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{D_0} e^{u^2+v^2} du dv$$

4 Changement de variable en coordonnées polaires :

$$\Phi(r, \theta) = (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \Rightarrow \det(J_\Phi(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

L'application Φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

5 Recherche du domaine de référence Ω tq $\Phi(\Omega) = D_0$

$$\begin{cases} u = r \cos(\theta) \\ v = r \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = r^2 \leq 4 \iff 0 \leq r \leq 2.$$

De plus,

$$u \geq 0 \quad \text{et} \quad v \geq 0 \iff \cos(\theta) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sin(\theta) \geq 0 \iff \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

6 Formule du changement de variable pour le calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{D_0} e^{u^2+v^2} du dv &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\Phi(r,\theta)} \det(J_{\Phi(r,\theta)}) dr d\theta = \int_{r=0}^{r=2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^2 e^{r^2} r dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{4} (e^4 - 1).\end{aligned}$$

6 Formule du changement de variable pour le calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{D_0} e^{u^2+v^2} du dv &= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\Phi(r,\theta)} \det(J_{\Phi(r,\theta)}) dr d\theta = \int_{r=0}^{r=2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^2 e^{r^2} r dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{4} (e^4 - 1).\end{aligned}$$

7 Conclusion :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \frac{\pi}{4} (e^4 - 1).$$

Intégrales triples

Intégrales triples

Definition

On appelle *pavé* de \mathbb{R}^3 un produit de segments $[a, b] \times [c, d] \times [u, v] \subset \mathbb{R}^3$, où a, b, c, d, u, v sont des réels et $a < b, c < d, u < v$.

Intégrales triples

Definition

On appelle *pavé* de \mathbb{R}^3 un produit de segments $[a, b] \times [c, d] \times [u, v] \subset \mathbb{R}^3$, où a, b, c, d, u, v sont des réels et $a < b, c < d, u < v$.

Propriété

Soit $D = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ un pavé de \mathbb{R}^3 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors les fonctions

- $(x, y) \in [a, b] \times [c, d] \mapsto \int_{[u, v]} f(x, y, z) dz \in \mathbb{R}$
- $(y, z) \in [c, d] \times [u, v] \mapsto \int_{[a, b]} f(x, y, z) dx \in \mathbb{R}$
- $(x, z) \in [a, b] \times [u, v] \mapsto \int_{[c, d]} f(x, y, z) dy \in \mathbb{R}$

sont continues

Theorem (Fubini)

Soit D un pavé de \mathbb{R}^3 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{[a, b] \times [c, d]} \left(\int_{[u, v]} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{[a, b] \times [u, v]} \left(\int_{[c, d]} f(x, y, z) dy \right) dx dz = \iint_{[c, d] \times [u, v]} \left(\int_{[a, b]} f(x, y, z) dx \right) dy dz\end{aligned}$$

Theorem (Fubini)

Soit D un pavé de \mathbb{R}^3 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{[a, b] \times [c, d]} \left(\int_{[u, v]} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{[a, b] \times [u, v]} \left(\int_{[c, d]} f(x, y, z) dy \right) dx dz = \iint_{[c, d] \times [u, v]} \left(\int_{[a, b]} f(x, y, z) dx \right) dy dz \end{aligned}$$

Corollary

Lorsque f vérifie $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$ pour tout $(x, y, z) \in [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, où $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ et $k : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_u^v k(z) dz \right).$$

Intégrale triple sur un domaine élémentaire

Definition

Une partie $D \subset \mathbb{R}^3$ est appelée *une partie élémentaire* ou *un domaine élémentaire* de \mathbb{R}^3 s'il existe

- 1 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, des fonctions $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et des fonctions $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$, continues, telles que $\tilde{\varphi}_1 \leq \tilde{\varphi}_2$, telles que

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \text{ et } \tilde{\varphi}_1(x, y) \leq z \leq \tilde{\varphi}_2(x, y), \}$$

- 2 idem en changeant l'ordre de x, y, z .

Propriété

Soit D un domaine élémentaire de \mathbb{R}^3 .

① Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\iiint_D (\lambda f + g)(x, y, z) \, dx dy dz = \lambda \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz + \iiint_D g(x, y, z) \, dx dy dz \quad \text{Linéarité}$$

② Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \geq 0$. Alors

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \geq 0 \quad \text{Positivité}$$

③ Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que $f \leq g$. Alors

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \leq \iiint_D g(x, y, z) \, dx dy dz \quad \text{Croissance}$$

Changement de variables

Theorem

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^3 et φ un C^1 -difféomorphisme de U sur V . Soient Ω et D des domaines élémentaires de \mathbb{R}^3 tels que $\varphi(\Omega) = D$. Alors, pour une fonction continue $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} (f \circ \varphi)(u, v, w) |\det(J_{\varphi}(u, v, w))| \, du dv dw.$$

Changement de variables en cylindriques

Rappel :

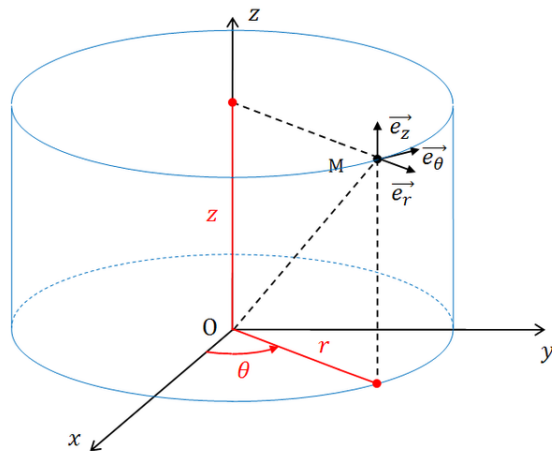
$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

On a

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$



- L'application $\varphi : (r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

est de classe \mathcal{C}^1 et son déterminant jacobien est donné par

$$\det(J_\varphi(r, \theta, z)) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0 \Rightarrow \varphi \text{ } \mathcal{C}^1 \text{ difféomorphisme.}$$

Propriété

On considère $-\pi \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$, et $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Soit Ω un domaine élémentaire de \mathbb{R}^3 tq

$$D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r \leq \mathcal{R}(\theta), z_1 \leq z \leq z_2\}$$

où $\mathcal{R} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue, 2π -périodique. Si $f \in \mathcal{C}^0(D)$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=0}^{\mathcal{R}(\theta)} \int_{z=z_1}^{z_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Intégrales sur des courbes paramétrées

Intégrales sur des courbes paramétrées

Motivation : Nous allons définir et étudier deux types d'intégrales

- 1 les *intégrales sur des courbes paramétrées*
- 2 les *intégrales sur des surfaces paramétrées*

Intégrales sur des courbes paramétrées

Motivation : Nous allons définir et étudier deux types d'intégrales

- 1 les *intégrales sur des courbes paramétrées*
- 2 les *intégrales sur des surfaces paramétrées*

Plan de travail :

- définir la notion de *courbe paramétrée*.
- *Intégrale curviligne* d'une 1-forme différentielle le long d'une courbe paramétrée, et la *circulation* d'un champ de vecteurs le long d'une courbe paramétrée.

Courbe paramétrée

Courbe paramétrée

Definition

Une *courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1* est un couple (I, γ) où I est un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 . L'ensemble $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé le *support* de γ .

Courbe paramétrée

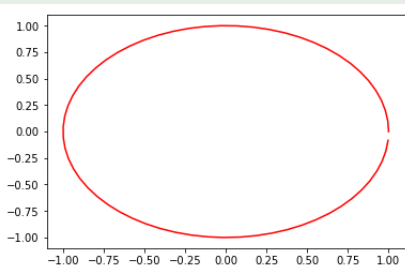
Definition

Une *courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1* est un couple (I, γ) où I est un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 . L'ensemble $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé le *support* de γ .

Exemple

Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

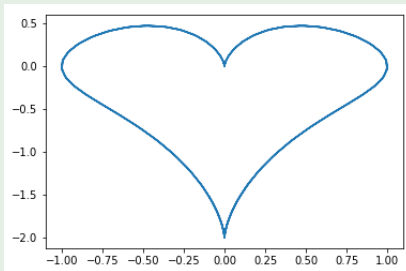
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$



Exemple

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

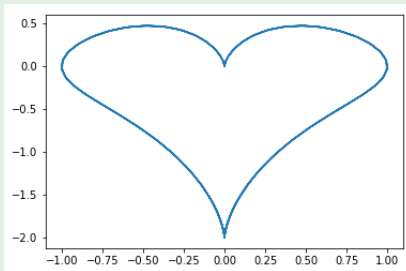
$$\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(t) - \cos^4(t))$$



Exemple

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(t) - \cos^4(t))$$



Interprétation cinématique : L'étude d'un arc paramétré correspond à l'étude du mouvement d'un point mobile $M(t)$ dont la position à l'instant t est le point $f(t)$

- le support de l'arc paramétré est appelé trajectoire du mouvement
- Les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont appelés respectivement vitesse et accélération du point $M(t)$ à l'instant t .

Definition

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée.

- 1 On dit que γ est *fermée* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- 2 On dit que γ est *simple* si $\gamma|_{]a,b[}$ est injective.
- 3 On dit que γ est *régulière* si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Definition

On appelle *reparamétrage* d'une courbe paramétrée γ une courbe paramétrée $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, C^1 -difféomorphisme de $[c, d]$ sur $[a, b]$, telle que

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$$

Intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle

Intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit ω une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$,

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$$

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée avec $\gamma([a, b]) \subset U$.

Intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit ω une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$,

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$$

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée avec $\gamma([a, b]) \subset U$.

Definition

L'intégrale curviligne de ω sur la courbe γ est

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b (a_1(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \cdots + a_n(\gamma(t)) \gamma'_n(t)) dt$$

Ici, $\omega(\gamma(t))$ est obtenu en remplaçant (x_1, \dots, x_n) par $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ dans l'expression de ω .

Theorem (Invariance par changement de paramètre croissant/décroissant)

Soit ω une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et $\tilde{\gamma}$ un reparamétrage de γ , tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ où φ est un C^1 -difféomorphisme.

- 1 Si φ est strictement croissante alors $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega$.
- 2 Si φ est strictement décroissante alors $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = - \int_{\gamma} \omega$.

Theorem (Invariance par changement de paramètre croissant/décroissant)

Soit ω une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et $\tilde{\gamma}$ un reparamétrage de γ , tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ où φ est un C^1 -difféomorphisme.

- 1 Si φ est strictement croissante alors $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega$.
- 2 Si φ est strictement décroissante alors $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = - \int_{\gamma} \omega$.

Preuve :

Theorem (Invariance par changement de paramètre croissant/décroissant)

Soit ω une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et $\tilde{\gamma}$ un reparamétrage de γ , tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ où φ est un C^1 -difféomorphisme.

- 1 Si φ est strictement croissante alors $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega$.
- 2 Si φ est strictement décroissante alors $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = - \int_{\gamma} \omega$.

Preuve :

- 1 On a $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ où $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_c^d \sum_{j=1}^n \omega_j(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_j(t) dt = \int_c^d \sum_{j=1}^n \omega_j(\gamma(\varphi(t))) \gamma'_j(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Changement de variable : $u = \varphi(t)$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_a^b \sum_{j=1}^n \omega_j(\gamma(u)) \gamma'_j(u) du = \int_{\gamma} \omega$$

Propriété (linéarité)

Soient ω_1, ω_2 des 1-formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U i.e. $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tq $\gamma([c, d]) \subset U$. On a

$$\int_{\gamma} \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2$$

Propriété (linéarité)

Soient ω_1, ω_2 des 1-formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U i.e. $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tq $\gamma([c, d]) \subset U$. On a

$$\int_{\gamma} \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2$$

Preuve :

Propriété (linéarité)

Soient ω_1, ω_2 des 1-formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U i.e. $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tq $\gamma([c, d]) \subset U$. On a

$$\int_{\gamma} \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2$$

Preuve : ω_1 et ω_2 sont des formes différentielles donc

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n \\ \omega_2 &= b_1 dx_1 + \cdots + b_n dx_n \end{aligned} \Rightarrow \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = (\lambda a_1 + \mu b_1) dx_1 + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n) dx_n$$

Propriété (linéarité)

Soient ω_1, ω_2 des 1-formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U i.e. $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tq $\gamma([c, d]) \subset U$. On a

$$\int_{\gamma} \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2$$

Preuve : ω_1 et ω_2 sont des formes différentielles donc

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n \\ \omega_2 &= b_1 dx_1 + \cdots + b_n dx_n \end{aligned} \Rightarrow \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = (\lambda a_1 + \mu b_1) dx_1 + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n) dx_n$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 &= \int_c^d (\lambda \omega_1 + \mu \omega_2)(\gamma(t)) dt = \int_c^d \sum_{j=1}^n (\lambda a_j + \mu b_j)(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \\ &= \int_c^d \sum_{j=1}^n \lambda a_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) (dt) + \int_c^d \sum_{j=1}^n \mu b_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2 \end{aligned}$$

Propriété (relation de Chasles)

Soit ω , une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U i.e. $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\gamma([a, b]) \subset U$. Soit $c \in]a, b[$ et soient γ_1 et γ_2 les restrictions respectives de γ à $[a, c]$ et $[c, b]$. Alors,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Propriété (relation de Chasles)

Soit ω , une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U i.e. $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\gamma([a, b]) \subset U$. Soit $c \in]a, b[$ et soient γ_1 et γ_2 les restrictions respectives de γ à $[a, c]$ et $[c, b]$. Alors,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Preuve :

Propriété (relation de Chasles)

Soit ω , une 1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U i.e. $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\gamma([a, b]) \subset U$. Soit $c \in]a, b[$ et soient γ_1 et γ_2 les restrictions respectives de γ à $[a, c]$ et $[c, b]$. Alors,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega(t) dt &= \int_a^b \omega(\gamma(t)) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^c \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \\ &+ \int_c^b \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^c \sum_{j=1}^n a_j(\gamma_1(t)) \gamma'_{1,j}(t) dt + \int_c^b \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) \gamma'_{2,j}(t) dt \end{aligned}$$

Lien entre intégrales et primitives

Lien entre intégrales et primitives

Rappel : On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation.

Lien entre intégrales et primitives

Rappel : On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation.

Theorem

Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Alors on a

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Lien entre intégrales et primitives

Rappel : On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation.

Theorem

Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Alors on a

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Conclusion : l'intégrale de la dérivée de f sur un segment s'exprime simplement en fonction des valeurs de f sur les bords du segment.

Lien entre intégrales et primitives

Rappel : On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation.

Theorem

Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Alors on a

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Conclusion : l'intégrale de la dérivée de f sur un segment s'exprime simplement en fonction des valeurs de f sur les bords du segment.

Comment généraliser ce résultat à une intégrale curviligne?

Theorem

Soit ω une 1-forme différentielle exacte sur $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $\omega = df$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U ($\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma([a, b]) \subset U$). Alors,

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad (\star)$$

Theorem

Soit ω une 1-forme différentielle exacte sur $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $\omega = df$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U ($\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma([a, b]) \subset U$). Alors,

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad (\star)$$

Preuve :

Theorem

Soit ω une 1-forme différentielle exacte sur $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $\omega = df$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U ($\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma([a, b]) \subset U$). Alors,

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad (\star)$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t)) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a). \end{aligned}$$

Theorem

Soit ω une 1-forme différentielle exacte sur $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $\omega = df$. Soit γ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n à support dans U ($\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma([a, b]) \subset U$). Alors,

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad (\star)$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t)) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a). \end{aligned}$$

Remarque : L'intégrale dépend des points de départ et d'arrivée mais pas du chemin γ parcouru entre les deux. Si la courbe γ est fermée, alors $\int_{\gamma} \omega = 0$.

Exemple

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ où Γ est l'arc de cercle de rayon $a > 0$, d'origine $(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$ et d'extrémité $(0, \frac{\pi}{2}a)$ et parcouru dans le sens trigonométrique.

Exemple

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ où Γ est l'arc de cercle de rayon $a > 0$, d'origine $(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$ et d'extrémité $(0, \frac{\pi}{2}a)$ et parcouru dans le sens trigonométrique.

Corrigé :

Exemple

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ où Γ est l'arc de cercle de rayon $a > 0$, d'origine $(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$ et d'extrémité $(0, \frac{\pi}{2}a)$ et parcouru dans le sens trigonométrique.

Corrigé :

❶ Soit $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{où} \quad P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

On a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Alors, ω est fermée. De plus Γ est étoilé. **Alors ω est exacte. On peut utiliser la formule (*)**.

2 Calcul d'une primitive :

ω est exacte : il existe f tq $\omega = df$. Or $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. On obtient le système

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Alors,

$$f(x,y) = -\frac{1}{y} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} dx = -\int \frac{1}{1 + u^2} du = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + K(y)$$

Or

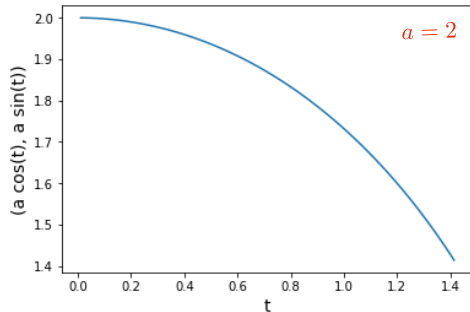
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y^2 + x^2} + K'(y) \iff K'(y) = 0 \iff K(y) = c$$

Finalement

$$f(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

3 Paramétrage de la courbe paramétrée Γ

$$\begin{aligned} \Gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos(t), a \sin(t)) \end{aligned}$$



4 Calcul de l'intégrale curviligne

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= f(\Gamma(\frac{\pi}{2})) - f(\Gamma(\frac{\pi}{4})) = f(0, a) - f(a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Exemple

Calculer $\int_{\Gamma} x^2 dx - xy dy$ où Γ est l'arc de parabole $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le sens des x croissants.

Exemple

Calculer $\int_{\Gamma} x^2 dx - xy dy$ où Γ est l'arc de parabole $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le sens des x croissants.

❶ **Etude de la forme différentielle** $\omega(x, y) = x^2 dx - xy dy$.

On pose

$$P(x, y) = x^2 \quad Q(x, y) = -xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -y.$$

La forme ω n'est pas fermée et donc n'est pas exacte. On ne peut appliquer la formule (*).

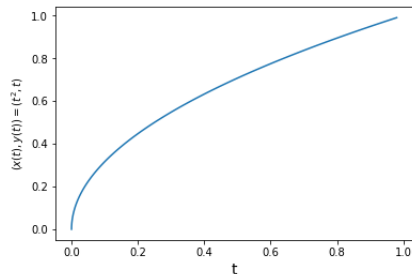
2 Paramétrisation de l'arc de la parabole

Posons $y = t$ (on définit y comme étant le paramètre), on a

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x = y^2 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ x = t^2 \\ y = t \end{cases}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t) := (x(t), y(t)) \end{aligned}$$



3 Calcul de l'intégrale curviligne :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} x^2 dx - xy dy &= \int_0^1 x^2(t)x'(t) - x(t)y(t)y'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^4 \times 2t - t^2 t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^5 - t^3) dt \\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Circulation d'un champs de vecteurs

Circulation d'un champs de vecteurs

Un peu de mécanique : Le travail d'une force est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace. Pour un déplacement infinitésimal \vec{du}

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{du}$$

Circulation d'un champs de vecteurs

Un peu de mécanique : Le travail d'une force est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace. Pour un déplacement infinitésimal \vec{du}

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{du}$$

Le travail d'une force pour un déplacement fini est donc égal à la circulation de cette force le long du trajet Γ de son point d'application

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{du}$$

Circulation d'un champs de vecteurs

Un peu de mécanique : Le travail d'une force est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace. Pour un déplacement infinitésimal \vec{du}

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{du}$$

Le travail d'une force pour un déplacement fini est donc égal à la circulation de cette force le long du trajet Γ de son point d'application

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{du}$$

Definition

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $\Gamma = ([a, b], \gamma)$ une courbe paramétrée. Soit \vec{V} un champ de vecteurs continu sur U . L'*intégrale curviligne* ou *circulation* de \vec{V} sur Γ , est définie par :

$$\int_{\Gamma} \vec{V} = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Remarque :

Remarque :

- Si $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ et $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, alors

$$\int_{\Gamma} \vec{V} = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Il s'agit alors de l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$, que l'on note aussi $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$.

Remarque :

- Si $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ et $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, alors

$$\int_{\Gamma} \vec{V} = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Il s'agit alors de l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$, que l'on note aussi $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$.

- Le vecteur $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ est le vecteur tangent à la courbe Γ au point $\gamma(t)$. Lorsque $\gamma(t)$ décrit la trajectoire d'un point matériel, le vecteur $\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse.

Exemple

Soit Γ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et \vec{V} le champ de vecteur défini par $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Calculer la circulation de \vec{V} sur Γ .

1 paramétrisation de Γ :

Γ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. On utilise le paramétrage :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x, y) = (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

2 Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{V} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) d\theta = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Propriété

Si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ (autrement dit \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire) et si Γ est une courbe orientée d'origine A , d'extrémité B incluse dans U , alors :

$$\int_{\Gamma} \vec{V} = f(B) - f(A).$$

Propriété

Si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ (autrement dit \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire) et si Γ est une courbe orientée d'origine A , d'extrémité B incluse dans U , alors :

$$\int_{\Gamma} \vec{V} = f(B) - f(A).$$

Remarque : Si Γ est fermée c-a-d si ses deux extrémités sont égales, alors $\int_{\Gamma} \vec{V} = 0$.
Autrement dit, la circulation sur une courbe fermée de tout champ de vecteurs dérivant d'un potentiel est nulle.

Propriété

Si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ (autrement dit \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire) et si Γ est une courbe orientée d'origine A , d'extrémité B incluse dans U , alors :

$$\int_{\Gamma} \vec{V} = f(B) - f(A).$$

Remarque : Si Γ est fermée c-a-d si ses deux extrémités sont égales, alors $\int_{\Gamma} \vec{V} = 0$.
Autrement dit, la circulation sur une courbe fermée de tout champ de vecteurs dérivant d'un potentiel est nulle.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{V} &= \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Formule de Green-Riemann

But : Pour ω une forme différentielle et Γ une courbe fermée, établir une relation entre une intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \omega$ et une intégrale double $\iint_D f(x,y) dx dy$ où D est le domaine intérieur à Γ .

Formule de Green-Riemann

But : Pour ω une forme différentielle et Γ une courbe fermée, établir une relation entre une intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \omega$ et une intégrale double $\iint_D f(x,y) dx dy$ où D est le domaine intérieur à Γ .

Theorem (Formule de Green-Riemann)

Soit Γ une courbe fermée qui entoure un domaine D (c-a-d $\Gamma = \partial D$). Soient P et Q deux fonctions de classe C^1 . On a

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$

Application : calcul d'une surface intérieure à une courbe fermée

On prend dans la formule de Green-Riemann $Q = 0$ et $P = -y$ on obtient

$$\int_{\Gamma} -y dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \iint_D dx dy$$

Or

$$\iint_D dx dy = \iint_D dS = S$$

On obtient donc une formule permettant de calculer la surface intérieure à Γ :

$$S = \int_{\Gamma} -y dx$$

Exemple

Calculer $\int_{\Gamma} -x^2y \, dx + xy \, dy$ où Γ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$.

Exemple

Calculer $\int_{\Gamma} -x^2y \, dx + xy \, dy$ où Γ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$.

- ① **Transformation de l'intégrale curviligne en une intégrale double :** Γ est un cercle donc une courbe fermée. Posons $P(x, y) = -x^2y$ et $Q(x, y) = xy$. P et Q sont de classe \mathcal{C}^1 et on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -x^2.$$

Exemple

Calculer $\int_{\Gamma} -x^2y \, dx + xy \, dy$ où Γ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$.

- ① **Transformation de l'intégrale curviligne en une intégrale double :** Γ est un cercle donc une courbe fermée. Posons $P(x, y) = -x^2y$ et $Q(x, y) = xy$. P et Q sont de classe C^1 et on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -x^2.$$

- ② **Formule de Green-Riemann :**

$$\int_{\Gamma} -x^2y \, dx + xy \, dy = \iint_D (y + x^2) \, dx dy \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

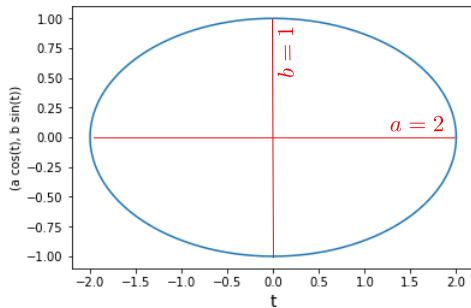
3 Calcul de l'intégrale double : Utilisation des coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\iint_D (y + x^2) dx dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\theta)) r dr d\theta \\&= \int_0^R r \left(\int_0^{2\pi} (r \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\theta)) d\theta \right) dr \\&= \int_0^R r \left(\int_0^{2\pi} r \sin(\theta) + r^2 \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \right) dr \\&= \int_0^R r \left[-r \cos(\theta) + \frac{r^2}{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta)) \right]_0^{2\pi} dr \\&= \pi \int_0^R r^3 dr \\&= \frac{\pi}{4} R^4.\end{aligned}$$

Exemple

Calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

On cherche à calculer $\iint_D dx dy$ où $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.



1 Identification de la forme différentielle :

$$\iint_D dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{où} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

1 Identification de la forme différentielle :

$$\iint_D dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{où} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

2 Formule de Green-Riemman :

$$\iint_D dx dy = \int_{\Gamma} -y dx \quad \text{où} \quad \Gamma = \partial D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

1 Identification de la forme différentielle :

$$\iint_D dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{où} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

2 Formule de Green-Riemman :

$$\iint_D dx dy = \int_{\Gamma} -y dx \quad \text{où} \quad \Gamma = \partial D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

3 Paramétrage de la courbe :

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = (a \cos(t), b \sin(t))$$

Ainsi

$$\int_{\Gamma} \omega dx = \int_0^{2\pi} -y(t)x'(t) dt = \int_0^{2\pi} ab \sin^2(t) dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \pi ab$$

Intégrales sur des surfaces paramétrées

Definition

Soit Δ un ouvert de \mathbb{R}^2 . Une *surface paramétrée* de \mathbb{R}^3 est une fonction $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

L'image $S = f(\Delta) = \{f(u, v), (u, v) \in \Delta\}$ est appelé *le support* de f .

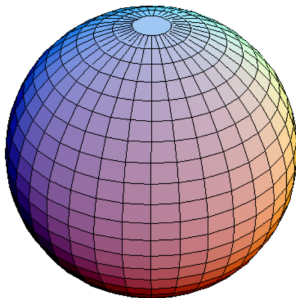
On dit aussi que S est la surface paramétrée par f (ou que f est une paramétrisation de S).

Exemple

Sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $R > 0$ dans \mathbb{R}^3

$$f : [0, \pi] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \mapsto (R \sin(\theta) \cos(\varphi), R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \cos(\theta))$$



Remarque :

- 1 On supposera que toutes les surfaces paramétrées sont de classe \mathcal{C}^1 et on omettra l'expression "de classe \mathcal{C}^1 " dans la suite.

2

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \right)$$

Definition

On dit que la surface paramétrée est *régulière en* (u, v) si $df_{u,v}$ est de rang 2, i.e. si

$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants.

On dit que la surface paramétrée est *régulière* si elle est régulière en tout point $(u, v) \in \Delta$.

Definition

Soit S une surface paramétrée par $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^1 .

- ① On appelle *vecteur normal* à la surface en un point $f(u, v)$ le vecteur :

$$\vec{n} = \vec{n}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

- ② On appelle *vecteur normal unitaire* en le point $M = f(u, v)$ le vecteur :

$$\vec{N} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}.$$

Exemple

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (R \sin(\theta) \cos(\varphi), R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de θ et φ la surface est-elle régulière ?

Corrigé :

Exemple

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (R \sin(\theta) \cos(\varphi), R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de θ et φ la surface est-elle régulière ?

Corrigé :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (R \cos(\theta) \cos(\varphi), R \cos(\theta) \sin(\varphi), -R \sin(\theta)), \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \sin(\theta) \cos(\varphi), 0) \end{cases}$$

Exemple

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (R \sin(\theta) \cos(\varphi), R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de θ et φ la surface est-elle régulière ?

Corrigé :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (R \cos(\theta) \cos(\varphi), R \cos(\theta) \sin(\varphi), -R \sin(\theta)), \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \sin(\theta) \cos(\varphi), 0) \end{cases}$$

et

$$\vec{n}(\theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \\ R^2 \sin^2(\theta) \sin(\varphi) \\ R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (R \sin(\theta) \cos(\varphi), R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de θ et φ la surface est-elle régulière ?

Corrigé :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (R \cos(\theta) \cos(\varphi), R \cos(\theta) \sin(\varphi), -R \sin(\theta)), \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \sin(\theta) \cos(\varphi), 0) \end{cases}$$

et

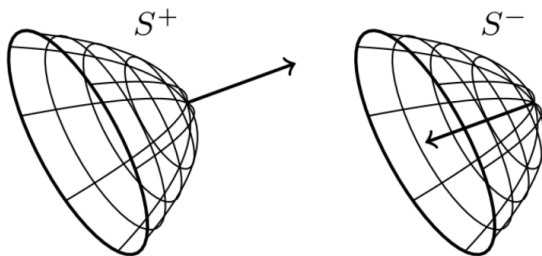
$$\vec{n}(\theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \\ R^2 \sin^2(\theta) \sin(\varphi) \\ R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

On voit donc que la surface paramétrée est régulière en les points $f(\theta, \varphi)$ tels que $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$.

Orientation d'une surface paramétrée

Definition

Soit Δ un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière. On appelle orientation de f , la donnée d'un champ de vecteurs normaux à la surface. On note S^+ la surface orientée par un vecteur sortant et S^- par la surface orientée dans le sens opposé.



Flux d'un champ de vecteurs

Definition

Soit \vec{V} un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^3 . Soit S^+ une surface orientée contenue dans U , paramétrée par $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et orientée par le vecteur normal $\vec{n}(u, v)$. On appelle *flux du champ \vec{V} à travers S^+* l'intégrale :

$$\iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iint_{\Delta} \vec{V}(f(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, du dv$$

Si S^+ est une surface fermée, le flux de \vec{V} à travers S^+ s'écrit :

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS}$$

Propriété

Soient \vec{V} un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^3 et S^+ une surface orientée contenue dans U . Si S^- est la même surface orientée dans le sens opposé à celui de S^+ , alors on a :

$$\iint_{S^-} \vec{V} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

Remarque : Le flux ne dépend pas du choix du paramétrage de la surface, seulement de son orientation. Changer d'orientation change le signe du flux.

Exemple

On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (z, x, y)$ et la surface $S^+ = \{x \in [0, 1], y \in [0, 1], z \in \mathbb{R} \mid z = xy\}$, paramétrée par $f(u, v) = (u, v, uv)$ avec $u \in [0, 1]$ et $v \in [0, 1]$. Calculer le flux de \vec{V} à travers S^+ .

Corrigé :

- 1 Calcul du vecteur normal :

$$\vec{n}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 2 Calcul du flux

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} \vec{V}(f(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, dudv = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \begin{pmatrix} uv \\ u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \, dudv \\ &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} (-uv^2 - u^2 + v) \, dudv \end{aligned}$$

- ③ **Application du Théorème de Fubini :** La fonction $(u, v) \mapsto -uv^2 - u^2 + v$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, donc

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= \left(- \int_0^1 u \, du \right) \left(\int_0^1 v^2 \, dv \right) - \int_0^1 u^2 \, du + \int_0^1 v \, du \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Théorème de Stokes pour les surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^3

Theorem (Stokes)

Soient S une surface paramétrée de \mathbb{R}^3 orientée par le choix d'un champ de normales \vec{n} et $\Gamma = \partial S$ le bord fermé de S . Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 . Le flux du rotationnel de \vec{V} à travers la surface S est égal à la circulation de \vec{V} le long du bord ∂S :

$$\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{V}.$$

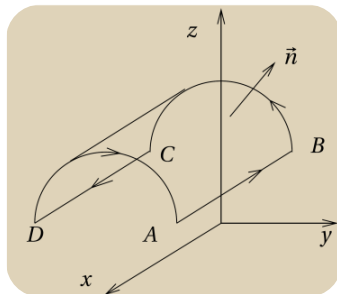
Remarque : Ce Théorème est très utile pour calculer la circulation d'un champs de vecteurs lorsqu'on obtient facilement un paramétrage de la surface.

Exemple

Soit la surface S définie par : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ et orientée par les normales \vec{n} telles que $\vec{n} \cdot \vec{e}_z \geq 0$. On appelle Γ le bord fermé de S .

Calculer la circulation I de $\vec{V} = \frac{1}{2} (z^2, x^2, y^2)$ le long de Γ par deux méthodes.

Illustration



1 Méthode 1 : On calcul des intégrales curvilignes

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{V} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{BC}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{CD}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{DA}} \vec{V}$$

1 Méthode 1 : On calcul des intégrales curvilignes

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{V} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{BC}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{CD}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{DA}} \vec{V}$$

- Paramétrisation du segment $[AB]$: $\vec{\gamma}_{AB}(t) = (t, 1, 1)$ où $t \in [1, 0]$

$$\int_{\Gamma_{AB}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_1^0 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1^2 \\ t^2 \\ 1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_1^0 dt = -\frac{1}{2}$$

1 Méthode 1 : On calcul des intégrales curvilignes

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{V} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{BC}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{CD}} \vec{V} + \int_{\Gamma_{DA}} \vec{V}$$

- Paramétrisation du segment AB : $\vec{\gamma}_{AB}(t) = (t, 1, 1)$ où $t \in [1, 0]$

$$\int_{\Gamma_{AB}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^0 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1^2 \\ t^2 \\ 1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_1^0 dt = -\frac{1}{2}$$

- Paramétrisation du demi-cercle BC : $\vec{\gamma}_{BC}(t) = (0, \cos t, 1 + \sin t)$ où $t \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{BC}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \sin t)^2 \\ 0 \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^3 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} \cos t dt - \int_0^{\pi} \cos t \sin^2 t dt \right) = \frac{1}{2} \left([\sin t]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

- Paramétrisation du segment $[CD]$: $\vec{\gamma}_{CD}(t) = (t, -1, 1)$ où $t \in [0, 1]$

$$\int_{\Gamma_{CD}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1^2 \\ t^2 \\ (-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 dt = \frac{1}{2}$$

- Paramétrisation du segment $[CD]$: $\vec{\gamma}_{CD}(t) = (t, -1, 1)$ où $t \in [0, 1]$

$$\int_{\Gamma_{CD}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1^2 \\ t^2 \\ (-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 dt = \frac{1}{2}$$

- Paramétrisation du demi-cercle DA : $\vec{\gamma}_{DA}(t) = (1, \cos t, 1 + \sin t)$ où $t \in [\pi, 0]$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{DA}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} &= \int_{\pi}^0 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \sin t)^2 \\ 1 \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 (-\sin t + \cos^3 t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\pi}^0 \sin t dt + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\pi}^0 \cos^3 t dt}_{=0} = \frac{1}{2} [\cos t]_{\pi}^0 = 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

2 Méthode 2 : Théorème de Stokes

2 Méthode 2 : Théorème de Stokes

- Calcul du rotationnel de \vec{V} :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = (y, z, x)$$

2 Méthode 2 : Théorème de Stokes

- Calcul du rotationnel de \vec{V} :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = (y, z, x)$$

- Paramétrisation de la surface S :

$$f : [0, 1] \times [\pi, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto (u, \cos v, 1 + \sin v)$$

2 Méthode 2 : Théorème de Stokes

- Calcul du rotationnel de \vec{V} :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = (y, z, x)$$

- Paramétrisation de la surface S :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [\pi, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, \cos v, 1 + \sin v) \end{aligned}$$

- Calcul du vecteur normal à la surface :

$$\vec{n} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

2 Méthode 2 : Théorème de Stokes

- Calcul du rotationnel de \vec{V} :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = (y, z, x)$$

- Paramétrisation de la surface S :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [\pi, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, \cos v, 1 + \sin v) \end{aligned}$$

- Calcul du vecteur normal à la surface :

$$\vec{n} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

- Formule de Stokes :

$$I = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{[0,1] \times [\pi,0]} \begin{pmatrix} \cos v \\ 1 + \sin v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos v \\ -\sin v \end{pmatrix} du dv = \frac{1}{2} [\cos v]_{\pi}^0 = 1$$

Théorème de Green-Ostrogradsky

Theorem (*Green-Ostrogradski*)

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 délimité par une surface fermée S orientée par un vecteur normal sortant. Soit \vec{F} un champ de vecteurs de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 . Alors :

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV,$$

Autrement dit, le flux du champ de vecteurs \vec{F} à travers la surface S est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume V .

Exemple

Calculer le flux Φ de $\vec{F}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ à travers les surfaces d'un cube centré à l'origine de côté 1.

Corrigé :

Exemple

Calculer le flux Φ de $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ à travers les surfaces d'un cube centré à l'origine de côté 1.

Corrigé :

- 1 Définition de la géométrie : Ω est le domaine délimité par le cube centré à l'origine de côté 1 : $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$.

Exemple

Calculer le flux Φ de $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ à travers les surfaces d'un cube centré à l'origine de côté 1.

Corrigé :

- 1 Définition de la géométrie : Ω est le domaine délimité par le cube centré à l'origine de côté 1 : $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$.
- 2 Calcul de la divergence : $\operatorname{div} \vec{F} = 2 + 2 + 2 = 6$.

Exemple

Calculer le flux Φ de $\vec{F}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ à travers les surfaces d'un cube centré à l'origine de côté 1.

Corrigé :

- 1 Définition de la géométrie : Ω est le domaine délimité par le cube centré à l'origine de côté 1 : $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$.
- 2 Calcul de la divergence : $\operatorname{div} \vec{F} = 2 + 2 + 2 = 6$.
- 3 Théorème de Green-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = \iiint_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3} 6 \, dx dy dz \\ &= 6 \underbrace{\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \right) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \right) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dz \right)}_{\text{volume du cube de côté } 1 = 1} \quad (\text{Théorème de Fubini}) \end{aligned}$$

Exercice

Calculer le flux à travers la surface S orientée selon l'axe (Oz) et délimitée par la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$z = 0$$

du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (1, 2, 3)$ de \mathbb{R}^3 . Même question pour $\vec{V} = (z, y, x^2)$.

Indication : La paramétrisation de cette surface notée S est donnée par l'application $f : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(t, r) = (ar \cos(t), br \sin(t), 0)$$

Corrigé :

- 1 Définition du flux du champ de vecteurs \vec{V} est donné par

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{[0,2\pi] \times [0,1]} \vec{V}(f(x,y)) \cdot \vec{n} dx dy$$

- 2 Calcul du vecteur normal \vec{n} :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -ar \sin(t) \\ br \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2arb \end{pmatrix}$$

3

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{[0,2\pi] \times [0,1]} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2arb \end{pmatrix} dt dr = -6ab2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = -6\pi ab.$$

Corrigé :

- 1 Définition du flux du champ de vecteurs \vec{V} est donné par

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{[0,2\pi] \times [0,1]} \vec{V}(f(x,y)) \cdot \vec{n} dx dy$$

- 2 Calcul du vecteur normal \vec{n} :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -ar \sin(t) \\ br \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2arb \end{pmatrix}$$

3

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{[0,2\pi] \times [0,1]} \begin{pmatrix} 0 \\ br \sin(t) \\ a^2 r^2 \cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2arb \end{pmatrix} dt dr = -2a^3 b \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2(t) dt dr$$

4 Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

5 Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{4}.$$

6 Conclusion :

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = -\frac{2a^3b\pi}{4}$$

Exercice

Calculer la circulation du champs de vecteurs $\vec{A}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ par deux méthodes le long de l'ellipse \mathcal{E} qui admet comme paramétrisation de sa surface :

$$x(t) = r \cos(t)$$

$$y(t) = r \sin(t)$$

$$z(t) = 1 - r \cos(t)$$

Corrigé :

- 1 On définit la fonction $f : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$f(t, r) = (r \cos(t), r \sin(t), 1 - r \cos(t))$$

- 2 Théorème de Stokes :

$$\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A}$$

3 Calcul de $\vec{\text{rot}}\vec{A}$:

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = (-2, -1, -2)$$

4 Calcul du vecteur normal à la surface :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ 1 + r \sin(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r - \sin(t) \\ \cos(t) \\ -r \end{pmatrix}$$

5 Calcul du flux :

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{\text{rot}}\vec{A} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r - \sin(t) \\ \cos(t) \\ -r \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r + 2 \sin(t) - \cos(t) + 2r) dr dt = 2 [-2 \cos(t) - \sin(t)]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$