# Dérivation et Intégration
# A1 Semestre 2

JAD DABAGHI

Enseignant-Chercheur en Mathématiques DVRC
*jad.dabaghi@devinci.fr*

# Table des matières

# Objectifs

1. Comprendre les comportements locaux et asymptotiques des fonctions
2. Savoir manipuler les développements limités
3. Savoir calculer plusieurs familles d'intégrales
4. Savoir résoudre les équations différentielles linéaires du 1er et 2nd ordre.

# Contenu du module

1. Chapitre 1 : Analyse réelle (CMO 1)
   - Un peu de topologie, continuité d'une fonction en un point.
2. Chapitre 2 : Relations de comparaison (CMO 1)
   - Fonctions dominées, fonctions négligeables, fonctions équivalentes.
3. Chapitre 3 : Développements limités (CMO 2)
   - Formules de Taylor, opérations sur les développements limités, applications.
   - **Contrôle continu 45 minutes 11 Mars 2023**
4. Chapitre 4 : Calcul d'intégrales (CMO 3)
5. Chapitre 5 : Équations différentielles (CMO 4)

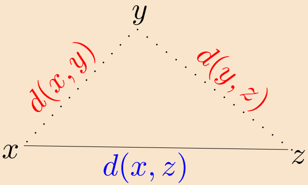
# Analyse réelle

# Analyse réelle

## Definition (distance)

Soit $E$ un ensemble non vide. Une **distance** sur $E$ est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E$

$$d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \text{(homogénéité)}$$
$$d(x,y) = d(y,x) \quad \text{(symétrie)}$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \text{(inégalité triangulaire).}$$




Le couple $(E,d)$ est appelé **espace métrique**.

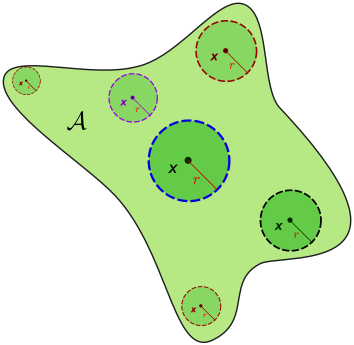
**Exemple :**

- Sur $\mathbb{R}$, la métrique usuelle est $d(x,y) = |x-y|$
- Sur $\mathbb{C}$, la métrique usuelle est $d(z_1,z_2) = |z_2 - z_1|$

## Definition (Ouvert)

Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit que $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ est un ouvert de $E$ si $\mathcal{A}$ contient une boule ouverte. Autrement dit, si

$$\forall x \in \mathcal{A},\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset \mathcal{A} \qquad B(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) < r\}$$




**Exemples ouverts :**

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $]a, b[$
- $B(x, r)$

## Definition (Voisinage)

- $(E, d)$ **espace métrique** et $a \in E$.

On dit que $\mathcal{V} \subset E$ est un voisinage de $a$ si, et seulement si, il existe un ouvert $O \subset \mathcal{V}$ contenant $a$. Autrement dit s'il existe $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

**Remarque :**

- En dimension 1,

$$\mathcal{V}_a = ]a - \eta, a + \eta[$$

- En dimension 2,

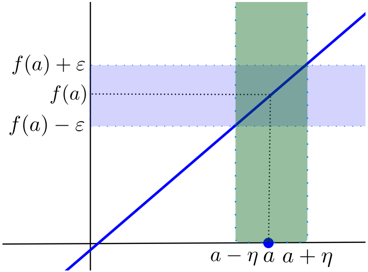
$$\mathcal{V}_a = B(a, \eta)$$

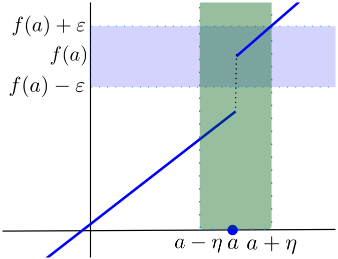
# Continuité

## Definition (Caractérisation de Weierstrass)

Une fonction $f$ est dite continue en $a \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right).$$



# Fonctions dominées

## Definition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors $f$ est **dominée** par $\varphi$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de $a$ et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de $a$. On note

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

# Fonctions dominées

## Definition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors $f$ est **dominée** par $\varphi$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de $a$ et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de $a$. On note

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

**Exemple** : $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x^2$. Alors

$$f(x) = \varphi(x)u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $u$ est bornée donc $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

# Fonctions négligeables

## Definition

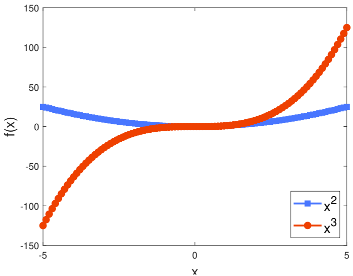
on dit que $f$ est **négligeable** devant $\varphi$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ tel que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. On note $f = o(\varphi)$.

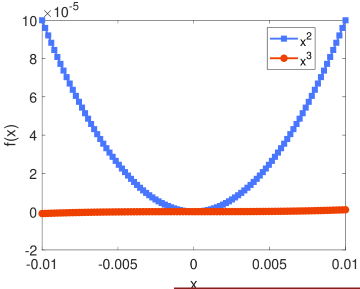
# Fonctions négligeables

## Definition

on dit que $f$ est **négligeable** devant $\varphi$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ tel que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. On note $f = o(\varphi)$.

**Exemple :** $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0 car $x^3 = x \times x^2$ avec $\varepsilon(x) = x$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.



# Quelques résultats

## Propriété

*Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in I$.

1. *La fonction* $f$ *est bornée au voisinage de* $a$ *si, et seulement si* $f = \mathcal{O}(1)$.
2. *La fonction* $f$ *tend vers* $0$ *en* $a$ *si, et seulement si* $f = o(1)$.

# Quelques résultats

## Propriété

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.*

1. *La fonction $f$ est bornée au voisinage de $a$ si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction $f$ tend vers 0 en $a$ si, et seulement si $f = o(1)$.*

**Démonstration :**

1. $(\Rightarrow)$ On suppose $f$ bornée au voisinage de $a$. $\forall x \in \mathcal{V}_a$, $|f(x)| = f(x) \times \underbrace{1}_{\text{bornée}}$. Donc $f = \mathcal{O}(1)$.

# Quelques résultats

## Propriété

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.*

1. *La fonction $f$ est bornée au voisinage de $a$ si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction $f$ tend vers 0 en $a$ si, et seulement si $f = o(1)$.*

**Démonstration :**

1. ($\Rightarrow$) On suppose $f$ bornée au voisinage de $a$. $\forall x \in \mathcal{V}_a$, $|f(x)| = f(x) \times \underbrace{1}_{\text{bornée}}$. Donc $f = \mathcal{O}(1)$.

   ($\Leftarrow$) $f = \mathcal{O}(1)$. Alors $\exists \varphi$ bornée sur $\mathcal{V}_a$ tel que $f = \varphi \times 1$ sur $\mathcal{V}_a$. Donc $f$ bornée sur $\mathcal{V}_a$.

2 $(\Rightarrow)$ $f$ tend vers 0 en $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, \ |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Alors $f = o(1)$.

2. ($\Rightarrow$) $f$ tend vers 0 en $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_1 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_1, a+\eta_1[,\ |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$$

Alors $f = o(1)$.

($\Leftarrow$) $f = o(1)$ au voisinage de $a$. Alors $\exists \varphi$ définie au voisinage de $a$ tel que $f = \varphi 1$ au voisinage de $a$ avec $\lim_a \varphi = 0$.
Or $\lim_a \varphi \in \mathcal{V}_a$ donc $\lim_a f = \lim_a \varphi = 0$.

# Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur $I$ tout entier.

   **Contre exemple :**

   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

# Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur $I$ tout entier.

   **Contre exemple :**
   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$
   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

2. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ au voisinage de $a$ alors $f$ n'est pas forcément égal à $g$.

   **Contre exemple :**
   $$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$
   On a $f = o(h)$ au voisinage de 0 et $g = o(h)$ au voisinage de 0 mais $f \neq g$.

# Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur $I$ tout entier.

   **Contre exemple :**

   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ au voisinage de $a$ alors $f$ n'est pas forcément égal à $g$.

   **Contre exemple :**

   $$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$

   On a $f = o(h)$ au voisinage de 0 et $g = o(h)$ au voisinage de 0 mais $f \neq g$.

3. Le même phénomène s'observe pour la notation $\mathcal{O}$.

# Règles de calcul

## Propriété

1. $f = o(\varphi) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi)$ *(négligeable $\Rightarrow$ bornée)*
2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ *et* $f_2 = \mathcal{O}(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ *(somme de fonctions bornée est bornée)*
3. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi_1)$ *et* $f_2 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = \mathcal{O}(\varphi_1 \varphi_2)$
4. $f_1 = o(\varphi)$ *et* $f_2 = o(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(\varphi)$ *(somme de termes négligeable est négligeable)*
5. $f_1 = o(\varphi_1)$ *et* $f_2 = o(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(\varphi_1 \varphi_2)$
6. $f = \mathcal{O}(\varphi_1)$ *et* $\varphi_1 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi_2)$ *(transitivité de la domination)*
7. $f = o(\varphi_1)$ *et* $\varphi_1 = o(\varphi_2) \Rightarrow f = o(\varphi_2)$ *(transitivité de la négligence)*

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, \ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, \; |g(x)| \leq \varepsilon.$$

   La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_1 = \varphi u$ au voisinage de $a$ où $u$ est bornée au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_1 > 0 \; \forall x \in ]a-\eta_1, a+\eta_1[, \; f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[,\ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_1 = \varphi u$ au voisinage de $a$ où $u$ est bornée au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_1 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_1, a+\eta_1[,\ f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

$f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ donc $f_2 = \varphi v$ au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_2 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_2, a+\eta_2[,\ f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, \; |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_1 = \varphi u$ au voisinage de $a$ où $u$ est bornée au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_1 > 0 \; \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, \; f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

$f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ donc $f_2 = \varphi v$ au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_2 > 0 \; \forall x \in ]a - \eta_2, a + \eta_2[, \; f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

Pour $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a $\forall x \in ]a - \eta, a + \eta[ \; (f_1 + f_2)(x) = \varphi(x)(u + v)(x)$. Comme $u + v$ bornée au voisinage de $a$ on a $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$.

# Démonstration

4
- $f_1 = o(\varphi)$ au voisinage de $a$ alors il existe une fonction $\varepsilon_1$ définie au voisinage de $a$ tel que
$$\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$$
et vérifiant $f_1 = \varepsilon_1 \varphi$ au voisinage de $a$
- $f_2 = o(\varphi)$ au voisinage de $a$ alors il existe une fonction $\varepsilon_2$ définie au voisinage de $a$ tel que
$$\lim_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$$
vérifiant $f_2 = \varepsilon_2 \varphi$ au voisinage de $a$.

Ainsi, la fonction $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ est bien définie au voisinage de $a$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, $f_1 + f_2 = o(\varphi)$.

# Règle pratique

## Propriété

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que $\varphi$ ne s'annule pas sur $I \backslash a$. Alors au voisinage de $a$*

1. *$f$ est dominée par $\varphi$ si, et seulement si, $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de $a$.*
2. *$f$ est négligeable devant $\varphi$ si, et seulement si, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.*

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x \to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x \to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

**Exercice :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0.

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

**Exercice :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0.

**Correction :** On a $f \underset{0}{\sim} g$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\to} 1.$$

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

**Exercice :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0.

**Correction :** On a $f \underset{0}{\sim} g$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\to} 1.$$

**Remarque :** $x \mapsto x$ est un DL à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0.

# Équivalent pour les polynômes

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

1. **Étude en** 0 **:** Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n = a_p x^p \underbrace{\left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} x + \cdots + \frac{a_n}{a_p} x^{n-p}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

# Équivalent pour les polynômes

$$f(x)=\sum_{k=p}^{n}a_kx^k \quad \text{avec} \quad a_p\neq 0 \quad \text{et} \quad a_n\neq 0.$$

1. **Étude en** $0$ **:** Pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(x)=a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n=a_px^p\underbrace{\left(1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x)\underset{0}{\sim}a_px^p$.

2. **Étude en** $+\infty$ **:** Pour $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=a_nx^n\underbrace{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{-2}+\cdots+\frac{a_p}{a_n}x^{p-n}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}a_nx^n$.

# Cas pratique

**Comment montrer que deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point ?**

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et $a \in I$. On suppose que $g$ ne s'annule pas sur $I \backslash a$. Alors, la fonction $f$ est équivalente à la fonction $g$ au voisinage de $a$, si et seulement si,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

# Résultats fondamentaux

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions équivalentes en $a \in I$.*

1. *Si $g$ a une limite finie ou infinie en $a$ alors $\lim_a f = \lim_a g$.*
2. *Si $g$ est positive sur $I$ alors $f$ est positive au voisinage de $a$.*
3. *Si $g$ ne s'annule pas sur $I$ alors $f$ ne s'annule pas au voisinage de $a$.*

**Obtention d'équivalents :** Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors au voisinage de $a$ :

$$\boxed{f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)}$$

# Exercices

1. Montrer que $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0
2. Montrer que $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0
3. Montrer que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0

**Corrigé :**

1. Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et que $e^0 = 1$ on a

$$e^x - e^0 \underset{0}{\sim} e'(0)(x-0) \Rightarrow e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$

1. $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable en 0 et et possède une dérivée non nulle

$$\sin(x) - \sin(0) \underset{0}{\sim} \sin'(0)(x-0) \Rightarrow \sin(x) \underset{0}{\sim} x.$$

2. $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et possède une dérivée non nulle

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+0}(x-0) \Rightarrow \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x.$$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t \to \alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

   **Correction :** $u(t) = \sin t$, $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ donc $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$. Finalement, $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$.

2. $\ln(\cos(t))$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$
   **Correction :** $u(t) = \sin t$, $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ donc $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$. Finalement, $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$.
2. $\ln(\cos(t))$
   **Correction :** On a $\ln(\cos(t)) = \ln(1 + \cos(t) - 1)$. Posons $u(t) = \cos(t) - 1$. Alors, $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$. De plus, $\ln(1+y) \underset{0}{\sim} y$. Donc, $\ln(1+u(t)) \underset{0}{\sim} u(t)$. Ainsi, $\ln(\cos(t)) \underset{0}{\sim} \cos(t) - 1$.

# Opération sur les fonctions équivalentes

## Propriété

*Si au voisinage de a on a*

1. $f_1 \sim g_1$ *et* $g_1 \sim g_2$ *alors* $f_1 \sim g_2$ *en* $a$ *(transitivité).*
2. *Si* $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$ *alors* $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ *en* $a$ *(produit).*
3. *Si* $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$ *et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur* $I \setminus a$ *alors* $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

## Propriété

1. *Si* $g = o(f)$ *au voisinage d'un point* $a \in I$*, alors* $f + g \underset{a}{\sim} f$.
2. *Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions définies sur un intervalle* $I$ *et* $a \in I$*. Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $f = \mathcal{O}(g)$ *au voisinage de* $a$*.*

# Application

Déterminer un équivalent de $f$ au voisinage de $+\infty$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

# Application

Déterminer un équivalent de $f$ au voisinage de $+\infty$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

**Correction :** On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}}\right) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}}\right).$$

Or $1 - e^y \underset{0}{\sim} y$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$. Donc, $1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-2}{x^3}$. De plus, $e^{\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{x^3}$.

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :**

## Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Ainsi

$$ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

# Remarques importantes

1. **Composition d'équivalents :** Si $f \sim g$ on ne peut rien dire à priori de $u \circ f$ et $u \circ g$.
**Exemple :** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$

# Remarques importantes

1. **Composition d'équivalents :** Si $f \sim g$ on ne peut rien dire à priori de $u \circ f$ et $u \circ g$.
**Exemple :** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$

2. **Somme d'équivalents :** Si $u_1 \sim u_2$ et $v_1 \sim v_2$ alors $u_1 + v_2 \not\sim u_2 + v_2$.
**Exemple :**

$$u(x) = \sin(2x) + \cos(x) - 1.$$

On a

$$\sin(y) \underset{0}{\sim} y \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} 2x = 0 \Rightarrow \sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x \quad \cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Or

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{2x} = \left(\frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\cos(x) - 1}{2x}\right) = 1 \Rightarrow u(x) \underset{0}{\sim} 2x$$

# Formules de Taylor

# Introduction

Les formules de Taylor constituent des outils très intéressants dans l'étude de fonctions. Elles permettent

1. d'approcher une fonction localement par des polynômes (Taylor–Young)
2. d'approcher une fonction globalement par des polynômes et de déduire une expression sur le reste (Taylor reste-intégral)

# Formules de Taylor

## Theorem (Formule de Taylor avec reste intégral)

*Soient $I$ un intervalle et $a, b \in I$. Supposons que $a < b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors :*

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\textit{polynôme}} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{\textit{reste}}.$$

# Formules de Taylor

## Theorem (Formule de Taylor avec reste intégral)

*Soient $I$ un intervalle et $a, b \in I$. Supposons que $a < b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors :*

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\textit{polynôme}} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{\textit{reste}}.$$

**Application :** Montrez que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

# Formules de Taylor

## Theorem (Formule de Taylor avec reste intégral)

*Soient $I$ un intervalle et $a, b \in I$. Supposons que $a < b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors :*

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\textit{polynôme}} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{\textit{reste}}.$$

**Application :** Montrez que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

**Correction :** Formule de Taylor avec reste intégral à la fonction cos à l'ordre 2 :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

# Formules de Taylor

## Theorem (Inégalité de Taylor Lagrange)

*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a,b]$, on a :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*formule donne des informations sur l'erreur d'approximation polynomiale !*

# Formules de Taylor

## Theorem (Inégalité de Taylor Lagrange)

*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$. Si $M$ majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a, b]$, on a :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*formule donne des informations sur l'erreur d'approximation polynomiale !*

**Exercice :** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24}$.

**Correction :** On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 à la fonction sinus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$.

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right| = \left|\sin(x) - x - \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{|x|^4}{4!} = \frac{x^4}{24}.$$

# Formules de Taylor

## Theorem (Formule de Taylor-Young)

*Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$, il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ telle que :*

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\iff f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Formule très importante ! Elle permet de déterminer le développement limité de $f$ à l'ordre $n$.

Mais... peu commode en pratique...

# Applications

1. Développement limité de $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
   **Correction :** La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La formule de Taylor-Young donne
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

# Applications

1. Développement limité de $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
   **Correction :** La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La formule de Taylor-Young donne
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. Développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de 0.
   **Correction :** La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La formule de Taylor-Young donne
   $$\begin{aligned} cos(x) &= 1 + \frac{x}{1!}\cos'(0) + \frac{x^2}{2!}\cos^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\cos^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\cos^{(4)}(0) + \cdots + o(x^n) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

3 Développement limité de $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0.
**Correction :** La fonction $x \mapsto \sin(x) \in \mathcal{C}^{\infty}$. La formule de Taylor-Young donne

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{x}{1!}\sin'(0) + \frac{x^2}{2!}\sin^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin^{(n)}(0) + o(x^n)\\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots (-1)^n o(x^{2n+1})\end{aligned}$$

3. Développement limité de $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0.
**Correction :** La fonction $x \mapsto \sin(x) \in \mathcal{C}^{\infty}$. La formule de Taylor-Young donne

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{x}{1!}\sin'(0) + \frac{x^2}{2!}\sin^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin^{(n)}(0) + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots (-1)^n o(x^{2n+1})\end{aligned}$$

4. Développement limité de $(1+x)^{\alpha}$ où $x > -1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
**Correction :** La fonction $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-1, +\infty[$. La formule de Taylor-Young donne

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

# Développements limités

# Développements limités

## Definition

Une fonction $f$ admet un développement limité l'ordre $n$ au voisinage de 0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et une fonction $\varepsilon$ définie sur $\mathcal{D}_f$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{x^n \varepsilon(x)}_{\text{Reste}} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

**Remarque :** Écriture équivalente :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

# Quelques exemples

1. $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x)$$

admet un DL à l'ordre 3 en 0 car

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \ln(1+x) \underset{0}{\to} 0$$

# Quelques exemples

1. $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x)$$
admet un DL à l'ordre 3 en 0 car
$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \ln(1+x) \underset{0}{\to} 0$$

2. Si une fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle contenant 0, alors la formule de Taylor-Young prouve qu'elle admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0 qui s'écrit :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

## Propriété (Unicité du DL)

*Si $f$ est une fonction pour laquelle il existe deux $(n+1)$-listes de réels $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$ vérifiant :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad et \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n),$$

*alors*

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (b_0, b_1, \cdots, b_n).$$

# Parité et développements limités

## Propriété

*Si $f$ admet en 0 un DL à l'ordre $n$ dont la partie régulière est $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.*

- *Si $f$ est paire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires de $x$.*
- *Si $f$ est impaire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances impaires de $x$.*

# Parité et développements limités

## Propriété

*Si $f$ admet en 0 un DL à l'ordre $n$ dont la partie régulière est $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.*

- *Si $f$ est paire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires de $x$.*
- *Si $f$ est impaire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances impaires de $x$.*

**Démonstration :** $f$ admet un **DL** à l'ordre $n$ en 0 donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

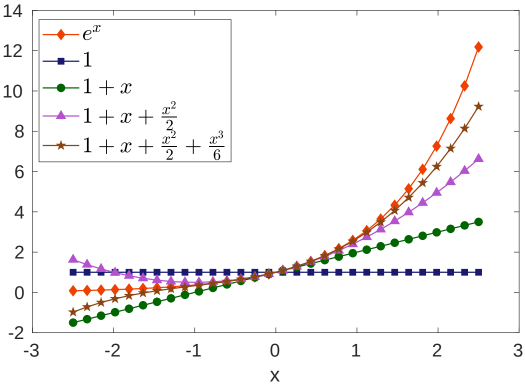
**$f$ est paire :** $\forall x \in \mathcal{V}_0,\ f(x) = f(-x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k + o((-x)^n)$.

**Unicité du DL :** $\forall 1 \leq k \leq n,\ a_k(-1)^k = a_k$.

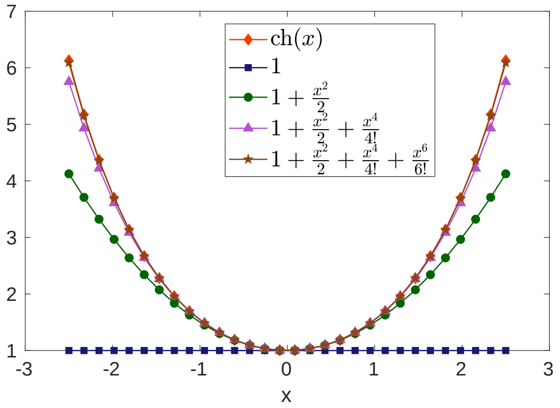
le polynôme $P$ ne contient que des puissances paires de $x$.

# Développements limités en 0 des fonctions élémentaires

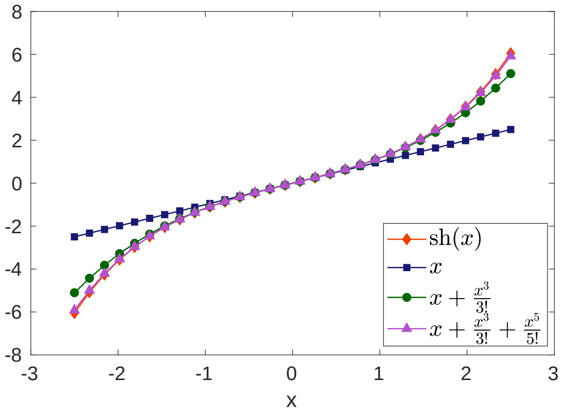
**Fonction exponentielle :** $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$



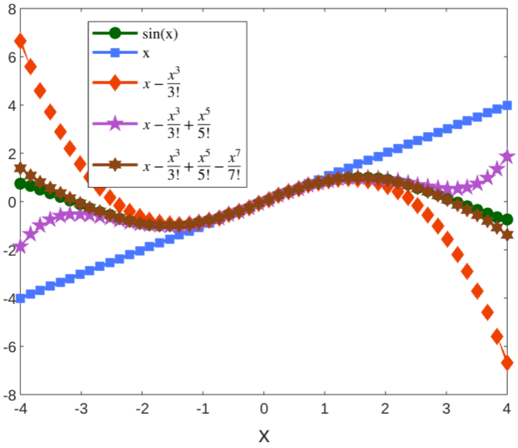
## La fonction hyperbolique ch : $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$



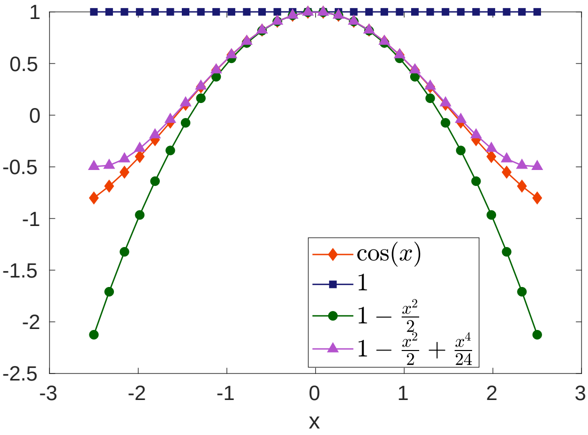
**La fonction hyperbolique** $\mathrm{sh}$ **:** $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$



**La fonction sinus :** $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$



**La fonction cosinus :** $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2})$



**La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ :**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

**Pour $\alpha$ un réel quelconque, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ :**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

**La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ :**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 3 au voisinage de 2 de $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

**Correction :**

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 3 au voisinage de 2 de $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

**Correction :**

1. Transformation de l'expression

$$f(x) = \frac{1}{2+x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)}.$$

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 3 au voisinage de 2 de $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

**Correction :**

1. Transformation de l'expression

$$f(x) = \frac{1}{2+x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)}.$$

2. Changement de variable. On pose $h = x - 2$. Alors $h$ tend vers 0 au voisinage de 2.

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{h}{2}}$$

DL de $\dfrac{1}{1+u}$ en 0 !

3. DL en 0 de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

3. DL en 0 de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

4. On remplace $u$ par $\dfrac{h}{2} \to 0$ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{h}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o\left(\frac{h^3}{8}\right)\right).$$

③ DL en 0 de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

④ On remplace $u$ par $\dfrac{h}{2} \to 0$ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{h}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o\left(\frac{h^3}{8}\right)\right).$$

⑤ DL de $f$ au voisinage de $x = 2$ ($h = x - 2 \to 0$) :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{2}o\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^3\right).$$

6 Simplification des termes négligeables :

$$o\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^3\right) = o((x-2)^3)$$

car

$$o\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^3\right) = \left(\frac{x-2}{2}\right)^3 \varepsilon\left(\frac{x-2}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 2} \varepsilon\left(\frac{x-2}{2}\right) = 0$$

$$= (x-2)^3 \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1(x) = \frac{1}{8}\varepsilon\left(\frac{x-2}{2}\right) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 2} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$= o((x-2)^3)$$

6. Simplification des termes négligeables :

$$o\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^3\right) = o((x-2)^3)$$

car

$$\begin{aligned} o\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^3\right) &= \left(\frac{x-2}{2}\right)^3 \varepsilon\left(\frac{x-2}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 2} \varepsilon\left(\frac{x-2}{2}\right) = 0 \\ &= (x-2)^3 \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1(x) = \frac{1}{8}\varepsilon\left(\frac{x-2}{2}\right) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 2} \varepsilon_1(x) = 0 \\ &= o((x-2)^3) \end{aligned}$$

7. Conclusion :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right).$$

# Dérivabilité et développement limité

## Propriété

*Soit $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Alors $f$ est continue en $x_0$ si, et seulement si, $f$ admet un DL à l'ordre 0 en $x_0$. Précisément, dans ce cas, au voisinage de $x_0$*

$$f(x) = f(x_0) + o(1).$$

# Dérivabilité et développement limité

## Propriété

*Soit $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Alors $f$ est continue en $x_0$ si, et seulement si, $f$ admet un DL à l'ordre 0 en $x_0$. Précisément, dans ce cas, au voisinage de $x_0$*

$$f(x) = f(x_0) + o(1).$$

**Démonstration :** $(\Rightarrow)$ Si $f$ est continue en $x_0$ : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
On définit $\varepsilon$ par $\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0)$. Alors $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, au voisinage de $x_0$

$$f(x) = f(x_0) + x^0 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1).$$

# Dérivabilité et développement limité

## Propriété

*Soit $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Alors $f$ est continue en $x_0$ si, et seulement si, $f$ admet un DL à l'ordre 0 en $x_0$. Précisément, dans ce cas, au voisinage de $x_0$*

$$f(x) = f(x_0) + o(1).$$

**Démonstration :** $(\Rightarrow)$ Si $f$ est continue en $x_0$ : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
On définit $\varepsilon$ par $\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0)$. Alors $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, au voisinage de $x_0$

$$f(x) = f(x_0) + x^0 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1).$$

$(\Leftarrow)$ si $f$ admet un DL à l'ordre 0 en $x_0$ : $f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to x_0} = \varepsilon(x) = 0$. Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 \quad \Rightarrow \quad \text{f continue en } x_0$$

## Propriété

*$f$ est dérivable en $x_0$ si, et seulement si, $f$ possède un DL à l'ordre 1 en $x_0$. Dans ce cas :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

## Propriété

*$f$ est dérivable en $x_0$ si, et seulement si, $f$ possède un DL à l'ordre 1 en $x_0$. Dans ce cas :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

**Démonstration :** $(\Rightarrow)$ Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
On pose :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On a $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$. Alors, $f$ admet un DL à l'ordre 1 en $x_0$.

## Propriété

*$f$ est dérivable en $x_0$ si, et seulement si, $f$ possède un DL à l'ordre 1 en $x_0$. Dans ce cas :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

**Démonstration :** $(\Rightarrow)$ Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
On pose :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On a $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$. Alors, $f$ admet un DL à l'ordre 1 en $x_0$.
$(\Leftarrow)$ Si $f$ admet un DL à l'ordre 1 en $x_0$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1.$$

alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = a_1$.

# Opérations sur les développements limités

**Remarque :**
La formule de Taylor-Young permet de calculer le DL d'une fonction en un point.

Pas toujours le bon choix !

**Exemple :** DL à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \sin(x)e^x \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Calcul des dérivées successives très coûteux !

**Alternative :** Opérations élémentaires pour calculer des DL

1. somme
2. produit, quotient
3. composition

# Somme de Développement limités

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ deux applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant en 0 des DL à l'ordre $n$ :*

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad et \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

*Alors, le **DL de** $f + g$ en 0 est : $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.*

# Somme de Développement limités

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ deux applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant en 0 des DL à l'ordre $n$ :*

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad et \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

*Alors, le **DL de** $f + g$ en 0 est : $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.*

**Démonstration :** Il existe des fonctions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ définies sur $\mathcal{D}$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{V}_0,\ f(x) &= P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0 \\ \forall x \in \mathcal{V}_0,\ g(x) &= Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{V}_0,\ f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \to 0.$$

# Application

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$.

# Application

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$.

**Correction :** Au voisinage de 0

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Par somme de développements limités on obtient au voisinage de 0

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

# Produit de Développements limités

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ deux applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant en 0 des DL à l'ordre $n$ :*

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad et \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

*Alors, la fonction $fg$ admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre $n$ qui s'écrit :*

$$f(x)g(x) = R(x) + o(x^n)$$

***où $R$ est le polynôme obtenu en ne gardant, dans le produit $PQ$, que les termes de degré inférieur ou égal à $n$.***

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\right)\left(Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right) \\ &= P(x)Q(x)+x^n\left(\varepsilon_1(x)Q(x)+\varepsilon_2(x)P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right). \end{aligned}$$

Soit $R$ le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit $PQ$ que les termes de degré inférieur ou égal à $n$. Alors

$$\forall x\in\mathcal{V}_0,\ P(x)Q(x)=R(x)+x^{n+1}T(x)\quad \text{où}\quad \deg(T)\leq n-1.$$

Donc

$$\forall x\in\mathcal{V}_0,\ f(x)g(x)=R(x)+x^{n+1}T(x)+x^n\underbrace{\left(\varepsilon_1(x)Q(x)+\varepsilon_2(x)P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right)}_{=\varepsilon(x)\to 0}$$

Ainsi, $fg$ admet $R$ comme DL à l'ordre $n$ au voisinage de 0.

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $g$ définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.

**Correction :**

1. **DL en 0 de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre $3$**

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $g$ définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.

**Correction :**

1. **DL en 0 de** $x \mapsto \cos(x)$ **à l'ordre** $3$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = P(x) + o(x^3)$$

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $g$ définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.

**Correction :**

1. **DL en 0 de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 3**

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = P(x) + o(x^3)$$

2. **DL en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$**

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) = Q(x) + o(x^3)$$

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $g$ définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.

**Correction :**

1. **DL en 0 de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 3**

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = P(x) + o(x^3)$$

2. **DL en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$**

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) = Q(x) + o(x^3)$$

3. DL de $g$ obtenu en ne gardant dans le produit que les termes de degré $\leq 3$.

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction $g$ définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$

**Correction :** On a

$$g(x)=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1-u(x)} \quad \text{où} \quad u(x)=1-\cos(x)\underset{x\to 1}{\to}0.$$

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction $g$ définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

**Correction :** On a

$$g(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u(x)} \quad \text{où} \quad u(x) = 1-\cos(x) \underset{x\to 1}{\to} 0.$$

1. $u \in \mathcal{C}^\infty(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ donc par Taylor–Young, $u$ admet un DL à l'ordre 4 en 0.

# Application

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction $g$ définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$

**Correction :** On a

$$g(x)=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1-u(x)}\quad \text{où}\quad u(x)=1-\cos(x)\underset{x\to 1}{\to}0.$$

1. $u\in\mathcal{C}^\infty(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ donc par Taylor–Young, $u$ admet un DL à l'ordre 4 en 0.
2. La fonction $x\mapsto\cos(x)$ admet en 0 le DL à l'ordre 4 :

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

Donc

$$1-\cos(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}-o(x^4)$$

3. la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ admet le DL à l'ordre 4 en 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4).$$

3 la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ admet le DL à l'ordre 4 en 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4).$$

4 On utilise la règle du produit de DL :

$$(1-\cos(x))^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

D'où

$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

# Intégration des développements limités

## Propriété

*Soit $I$ un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue possédant en 0 un DL à l'ordre $n$ qui vaut $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Si $F$ est une primitive de $f$, alors elle admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 qui est :*

$$F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

**Remarque :** Très pratique pour retrouver le DL d'une fonction dont on connait la primitive ($x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, etc...).

# Applications

Ecrivons le DL à l'ordre $n$ de $\dfrac{1}{1+x}$ :

**Correction :**

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Or $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Donc, le DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ est

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

# Application

Ecrivons le développement limité à l'ordre $n$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$ :

**Correction :**

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Or $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est une primitive de $x \mapsto \arctan(x)$.
Ainsi, le développement limité de $x \mapsto \arctan(x)$ est donné par

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

# Recherche d'équivalents

## Propriété

*Si $f$ admet en $x_0$ un DL d'ordre $n$ dont la partie régulière est : $\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k$ avec $a_p \neq 0$. alors :*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p.$$

# Recherche d'équivalents

## Propriété

*Si $f$ admet en $x_0$ un DL d'ordre $n$ dont la partie régulière est :* $\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k$ *avec* $a_p \neq 0$*. alors :*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p.$$

**Démonstration :**

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^p)$$

et

$$\frac{f(x)}{a_p(x-x_0)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-x_0) + \frac{a_{p+2}}{a_p}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{a_{n+p}}{a_p}(x-x_0)^n \underset{x_0}{\to} 1.$$

# Exercice

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,(1 + \cos(x)) - 2\tan(x).$$

**Correction : :**

# Exercice

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,(1 + \cos(x)) - 2\tan(x).$$

**Correction : :**

1. $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire. La partie régulière du DL de $f$ ne contient que des puissances impaires de $x$.

# Exercice

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,(1 + \cos(x)) - 2\tan(x).$$

**Correction : :**

1. $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire. La partie régulière du DL de $f$ ne contient que des puissances impaires de $x$.
2. DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos(x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow x\,(1 + \cos(x)) = 2x - \frac{x^3}{2} + xo(x^3).$$

## ③ Simplification des termes négligeables :

$$\begin{aligned} xo(x^3) &= xx^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \\ &= x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \\ &= o(x^4). \end{aligned}$$

3. **Simplification des termes négligeables :**

$$\begin{aligned} xo(x^3) &= xx^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \\ &= x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \\ &= o(x^4). \end{aligned}$$

4. **DL en $0$ à l'ordre $3$ de $x \mapsto x(1+\cos(x))$**

$$x\,(1+\cos(x)) = 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^4).$$

3. **Simplification des termes négligeables :**

$$\begin{aligned} xo(x^3) &= xx^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \\ &= x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \\ &= o(x^4). \end{aligned}$$

4. **DL en $0$ à l'ordre $3$ de $x \mapsto x(1+\cos(x))$**

$$x\,(1+\cos(x)) = 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^4).$$

5. $\tan(x) = \sin(x) \times \dfrac{1}{\cos(x)}$. Le DL de $x \mapsto \sin(x)$ à l'ordre 4 est :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

## 6 Transformation $\dfrac{1}{u} \to \dfrac{1}{1-u}$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-(1-\cos(x))} = \frac{1}{1-u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = 1-\cos(x)$$

6 **Transformation $\dfrac{1}{u} \rightarrow \dfrac{1}{1-u}$**

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-(1-\cos(x))} = \frac{1}{1-u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = 1-\cos(x)$$

7 Or le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1-u}$ est : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$.

6 **Transformation** $\dfrac{1}{u} \to \dfrac{1}{1-u}$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-(1-\cos(x))} = \frac{1}{1-u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = 1-\cos(x)$$

7 Or le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1-u}$ est : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$.

8 Ainsi, le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est donné par

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + (1-\cos(x)) + (1-\cos(x))^2 + (1-\cos(x))^3 + o((1-\cos(x))^3)\\ &= \frac{x^2}{2} - o(x^4) + \left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)^3 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)^3\right).\end{aligned}$$

9 DL d'un produit : on ne garde que les termes de degré $\leq 3$.

$$(1-\cos(x))^2 = -x^2 o(x^3) + (o(x^3))^2 = -o(x^5) + o(x^6) = o(x^5).$$

$$(1-\cos(x))^3 = o(x^7).$$

9. DL d'un produit : on ne garde que les termes de degré $\leq 3$.

$$(1-\cos(x))^2 = -x^2 o(x^3) + (o(x^3))^2 = -o(x^5) + o(x^6) = o(x^5).$$

$$(1-\cos(x))^3 = o(x^7).$$

10. Simplification des termes négligeables,

$$o\left(\left(\frac{x^2}{2} - o(x^3)\right)^3\right) = o(x^7).$$

## 11 DL de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 3

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4).$$

**11 DL de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 3**

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4).$$

**12 On obtient alors le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \tan(x)$**

$$\tan(x) = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}_{\text{DL sin}} \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)}_{\text{DL } 1/\cos}$$

$$\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

13 DL au voisinage de 0 de $f$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{DL}\, f(x) &= \mathrm{DL}\left\{x(1+\cos(x))\right\} + \mathrm{DL}\left\{-2\tan(x)\right\} \\
&= \left(2x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\
&= -\frac{7x^3}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

13 DL au voisinage de 0 de $f$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{DL}\, f(x) &= \mathrm{DL}\left\{x(1+\cos(x))\right\} + \mathrm{DL}\left\{-2\tan(x)\right\} \\ &= \left(2x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{7x^3}{6} + o(x^4)\end{aligned}$$

14 **Equivalent de $f$ en** $0$ **:**

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{7}{6}x^3.$$

# Etude de tangentes

# Etude de tangentes

**DL d'ordre 1 :** $f$ est dérivable en $x_0$ ssi $f$ admet un DL à l'ordre 1 en $x_0$. Alors $f$ possède une tangente $T$ en $x_0$. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $T$ est donnée par le signe de

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$$

# Etude de tangentes

**DL d'ordre 1 :** $f$ est dérivable en $x_0$ ssi $f$ admet un DL à l'ordre 1 en $x_0$. Alors $f$ possède une tangente $T$ en $x_0$. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $T$ est donnée par le signe de

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$$

**DL d'ordre 2 :** Si $f$ possède en $x_0$ un DL d'ordre 2. Alors

$$f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2 a_2 + o((x - x_0)^2) \quad \text{avec} \quad a_2 \neq 0.$$

Alors la tangente est la droite d'équation $T_y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et, au voisinage de $x_0$, la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $T_y$ est donnée par le signe de $a_2$, car :

$$\begin{aligned} f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) &= (x - x_0)^2 a_2 + o((x - x_0)^2) \\ &\underset{x_0}{\sim} a_2(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

**DL d'ordre p :** Si $f$ possède en $x_0$ un DL à un ordre $p \geq 2$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

On note $k$ le degré du premier coefficient non nul dans le DL à partir du degré 2 et on note $a_k$ son coefficient.

- Si $k$ est pair et $a_k > 0$ alors la courbe est au dessus de sa tangente.
- Si $k$ est pair et $a_k < 0$ alors la courbe est en dessous de sa tangente.
- Si $k$ est impair et $a_k > 0$ alors la courbe traverse sa tangente en passant au dessus.
- Si $k$ est impair et $a_k > 0$ alors la courbe traverse sa tangente en passant en dessous.

# Application

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Déterminer la position de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

**Correction :**

1. **Transformation en DL usuel**

$$f(x) = \frac{1}{2 + (e^x - 1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + u(x))} \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{e^x - 1}{2}.$$

2. **DL de $u \mapsto (1+u)^{-1}$ en 0 à l'ordre $3$ en $0$**

$$(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

3. **DL de $x \mapsto e^x$ en 0 à l'ordre $3$ en $0$**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Alors, $u(x) = \dfrac{e^x - 1}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$.

4. **Règle du DL d'un produit :**

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \quad \text{et} \quad u^3(x) = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

5. **DL de $f$ en $0$ :**

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

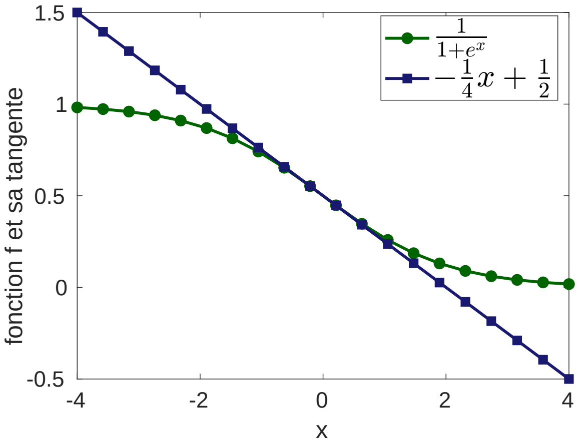
6. **Equation de la tangente à $f$ au point $0$ :**

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

7. **Signe de $f - g$ :**

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{1}{48}x^3 > 0 \quad \text{pour x > 0}$$

# Illustration graphique



# Calcul d’intégrales

# Primitives et intégrale d'une fonction continue

## Definition

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $I$ et dont la dérivée est égale à $f$.

**Exemples :**

# Primitives et intégrale d'une fonction continue

## Definition

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $I$ et dont la dérivée est égale à $f$.

**Exemples :**

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f(x)$.

# Primitives et intégrale d'une fonction continue

## Definition

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $I$ et dont la dérivée est égale à $f$.

**Exemples :**

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f(x)$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f(x)$.

# Primitives et intégrale d'une fonction continue

## Definition

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $I$ et dont la dérivée est égale à $f$.

**Exemples :**

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f(x)$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f(x)$.
- $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = f(x)$.

## Propriété

*Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Si $F$ est une primitive de $f$, alors l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*

## Propriété

*Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Si $F$ est une primitive de $f$, alors l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*

**Démonstration :** Soit $G$ la fonction définie sur $I$ par

$$G(x) = F(x) + \lambda \quad \forall x \in I.$$

Alors, la fonction $G$ est dérivable sur $I$ et $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

## Propriété

*Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Si $F$ est une primitive de $f$, alors l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*

**Démonstration :** Soit $G$ la fonction définie sur $I$ par

$$G(x) = F(x) + \lambda \quad \forall x \in I.$$

Alors, la fonction $G$ est dérivable sur $I$ et $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

## Théorème (Fondamental)

*Soient $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $a$ un point de $I$. La fonction $F_a$ définie par :*

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

*est une primitive de $f$ sur $I$. C'est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

**Démonstration :** On prouve que $F_a$ est dérivable sur $I$ et $F_a' = f$ sur $I$. Soit $x_0 \in I$.

$$\left|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(x_0)\right| \leq \sup_{t\in[x_0,x]} |f(t) - f(x_0)|\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est continue en $x_0$

$$\exists \eta > 0\ \forall t \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap[x_0, x],\ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \ \Rightarrow \sup_{t\in[x_0,x]} |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Alors,

$$\left|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Donc $F_a$ est dérivable en $x_0 \in I$ et $F_a'(x_0) = f(x_0)$.

## Théorème

*Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et a et b deux points de I. Si F est une primitive de $f$ sur I, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a).$$

**Exercices :** Calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_a^b e^{2x}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_a^b = \frac{1}{2}\left(e^{2b} - e^{2a}\right)$$

2. $$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{dx} = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2$$

# Méthodes de calcul de primitives

# Méthodes de calcul de primitives

## Théorème (Intégration par parties)

*Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Soient* $u$ *et* $v$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$. *Alors*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{dt} = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{dt}.$$

# Méthodes de calcul de primitives

## Théorème (Intégration par parties)

*Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*. Soient u et v deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$*. Alors*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice :** Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

# Méthodes de calcul de primitives

## Théorème (Intégration par parties)

*Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *Soient* $u$ *et* $v$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$. *Alors*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice :** Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

**Correction :** $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto x$. Alors $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1([1,2])$. Par la formule d'IPP

$$\int_1^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 1.$$

## Théorème (Changement de variables)

*Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Si $\alpha$ et $\beta \in J$ on a :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du}.$$

## Théorème (Changement de variables)

*Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Si $\alpha$ et $\beta \in J$ on a :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du}.$$

**Démonstration :** $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ donc admet une primitive $F$ d'après le Théorème fondamental.

## Théorème (Changement de variables)

*Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Si $\alpha$ et $\beta \in J$ on a :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

**Démonstration :** $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ donc admet une primitive $F$ d'après le Théorème fondamental. De plus, $\varphi(\alpha) \in I$ et $\varphi(\beta) \in I$. Donc

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha).$$

## Théorème (Changement de variables)

*Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Si $\alpha$ et $\beta \in J$ on a :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

**Démonstration :** $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ donc admet une primitive $F$ d'après le Théorème fondamental. De plus, $\varphi(\alpha) \in I$ et $\varphi(\beta) \in I$. Donc

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha).$$

Or $F$ est dérivable sur $I$ et $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Ainsi,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

# Remarques

**On a le choix :**

1. Trouver la fonction $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^1$ sous-jacente au changement de variable. **Avantage :** On voit tous les détails lors de la tranformation via la fonction $\varphi$ et c'est plus rigoureux. **Inconvénients :** Parfois un peu long.

2. On pose $u$ en fonction de la variable primale $x$ (par exemple) et on calcul $du$ en fonction de $dx$ et on adapte les bornes. **Avantage :** Plus rapide. **Inconvénients :** moins rigoureux.

# Exercices

Calculer l'intégrale suivante :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)\,\mathrm{du}$$

# Exercices

Calculer l'intégrale suivante :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)\,\mathrm{du}$$

**Correction :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0, \frac{\pi}{2}])$ définie par $\varphi(u) = \sin(u)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty([0, \frac{\pi}{2}])$ définie par $f(u) = u^2$. Par la formule du changement de variable, on obtient

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} t^2\,\mathrm{dt} = \int_0^1 t^2\,\mathrm{dt} = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

# Exercices

Calculer l'intégrale suivante :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)\,\mathrm{du}$$

**Correction :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0, \frac{\pi}{2}])$ définie par $\varphi(u) = \sin(u)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty([0, \frac{\pi}{2}])$ définie par $f(u) = u^2$. Par la formule du changement de variable, on obtient

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} t^2\,\mathrm{dt} = \int_0^1 t^2\,\mathrm{dt} = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**Autre rédaction possible :** on pose $v(u) = \sin(u)$. Alors $\mathrm{dv} = \cos(u)\,\mathrm{du}$. Pour $u = 0$ $\rightarrow$ $v = 0$ et pour $u = \frac{\pi}{2} \rightarrow v = 1$. Donc

$$A = \int_0^1 v^2\,\mathrm{dt} = \frac{1}{3}.$$

# Exercices

Calculer $B = \int_{-1}^{2} \sqrt{4-u^2}u \, \mathrm{du}$.

# Exercices

Calculer $B = \int_{-1}^{2} \sqrt{4-u^2}u \,\mathrm{du}$.

**Correction :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([-1,2])$ définie par $\varphi(u) = u^2$ et $f \in \mathcal{C}^0([-1,2])$ définie par $f(v) = \sqrt{4-v}$. Alors, on a

$$B = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(\varphi(u))\varphi'(u) \,\mathrm{du} = \frac{1}{2}\int_{\varphi(-1)}^{\varphi(2)} f(t) \,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{1}^{4} \sqrt{4-t} \,\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \sqrt{3}.$$

# Exercices

Calculer $B = \int_{-1}^{2} \sqrt{4-u^2}u \,\mathrm{du}$.

**Correction :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([-1,2])$ définie par $\varphi(u) = u^2$ et $f \in \mathcal{C}^0([-1,2])$ définie par $f(v) = \sqrt{4-v}$. Alors, on a

$$B = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = \frac{1}{2}\int_{\varphi(-1)}^{\varphi(2)} f(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\sqrt{4-t}\,\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \sqrt{3}.$$

**Autre rédaction possible :** Posons $t = u^2$ de sorte que $dt = 2udu$. La formule du changement de variable donne

$$B = \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\sqrt{4-t}\,\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \sqrt{3}.$$

# Exercices

Calculer $C = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{dt}$.

**Correction :**

## Exercices

Calculer $C = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Correction :** Soient $f$ et $\varphi$ les fonctions définies sur $[-1, \frac{1}{2}]$ par $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ et $\varphi : u \mapsto \sin(u)$. Alors $f \in \mathcal{C}^0([-1, \frac{1}{2}])$, et $\varphi \in \mathcal{C}^1([-1, \frac{1}{2}])$.

# Exercices

Calculer $C = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Correction :** Soient $f$ et $\varphi$ les fonctions définies sur $[-1, \frac{1}{2}]$ par $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ et $\varphi : u \mapsto \sin(u)$. Alors $f \in \mathcal{C}^0([-1, \frac{1}{2}])$, et $\varphi \in \mathcal{C}^1([-1, \frac{1}{2}])$.

**Formule du changement de variable**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{\varphi(-\frac{\pi}{2})}^{\varphi(\frac{\pi}{6})} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\cos(u)|\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{dt} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos(2u)+1)\,\mathrm{du}\ \text{(Formule de Moivre)}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2u)+u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

# Changement de variable affine

# Changement de variable affine

## fonction périodique

# Changement de variable affine

## fonction périodique

### Propriété

*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et périodique de période $T > 0$. Alors*

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{du} = \int_{a+T}^{b+T} f(v)\,\mathrm{dv}$$

# Changement de variable affine

## fonction périodique

### Propriété

*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ et périodique de période $T>0$. Alors*

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{du} = \int_{a+T}^{b+T} f(v)\,\mathrm{dv}$$

**Démonstration :** Si $f$ est $T$-périodique alors $\forall x \in [a,b]$, $f(x+T)=f(x)$.
Posons $\varphi(v)=v+T$. Alors, $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$. D'après le **théorème du changement de variable**

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(v)\,\mathrm{dv} = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = \int_a^b f(u+T)\,\mathrm{du} = \int_a^b f(u)\,\mathrm{du}.$$

# fonction paire

## fonction paire

### Propriété

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ contenant 0 et soit $a \in I$. Si $f$ est paire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 2\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}$$

## fonction paire

### Propriété

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ contenant $0$ et soit $a \in I$. Si $f$ est paire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 2\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}$$

**Démonstration :**

## fonction paire

**Propriété**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ contenant 0 et soit $a \in I$. Si $f$ est paire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 2\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} &= \int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} + \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du} \\ &= -\int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du} + \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}\end{aligned}$$

## fonction paire

**Propriété**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ contenant $0$ et soit $a \in I$. Si $f$ est paire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 2\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} &= \int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} + \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}\\ &= -\int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du} + \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}\end{aligned}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([-a,0])$ définie par $\varphi(v) = -v$.

Par la formule du changement de variable

Par la formule du changement de variable

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{-a}^{0} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du}.$$

Par la formule du changement de variable

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{-a}^{0} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du}.$$

Or

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = -\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du}$$

Par la formule du changement de variable

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{-a}^{0} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du}.$$

Or

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = -\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du}$$

Donc

$$-\int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}.$$

Par la formule du changement de variable

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{-a}^{0} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{du} = -\int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du}.$$

Or

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = -\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du}$$

Donc

$$-\int_{0}^{-a} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}.$$

Ainsi

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 2\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du}.$$

# fonction impaire

## fonction impaire

### Propriété

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ contenant $0$ et $a \in I$. Si $f$ est impaire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 0$$

## fonction impaire

**Propriété**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ contenant 0 et $a \in I$. Si $f$ est impaire alors*

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 0$$

Le changement de variable précédent donne

$$\int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{-a}^{0} -f(-u)\,\mathrm{du} = \int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du}.$$

Ainsi,

$$-\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{a}^{0} f(u)\,\mathrm{du} = \int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{du}.$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{du} = 0.$$

# Transformation affine sur l'élément de référence

## Transformation affine sur l'élément de référence

### Propriété

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux points de $I$. Alors,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)v)\,\mathrm{dv}$$

## Transformation affine sur l'élément de référence

**Propriété**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux points de $I$. Alors,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)v)\,\mathrm{dv}$$

**Démonstration :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ définie par

$$\varphi(v) = a + (b-a)v.$$

D'après la formule du changement de variable

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^1 f(\varphi(v))\varphi'(v)\,\mathrm{dv} = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)v)\,\mathrm{dv}.$$

# Primitives des fonctions polynômes-exponentielles

# Primitives des fonctions polynômes-exponentielles

## Propriété

*Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $P$ une fonction polynomiale. Alors la fonction $x \mapsto P(x)e^{ax}$ a une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax}$ où $Q$ est une fonction polynomiale de même degré que $P$.*

# Primitives des fonctions polynômes-exponentielles

## Propriété

*Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $P$ une fonction polynomiale. Alors la fonction $x \mapsto P(x)e^{ax}$ a une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax}$ où $Q$ est une fonction polynomiale de même degré que $P$.*

**Exercice :** Déterminer une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)$$

# Primitives des fonctions polynômes-exponentielles

## Propriété

*Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $P$ une fonction polynomiale. Alors la fonction $x \mapsto P(x)e^{ax}$ a une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax}$ où $Q$ est une fonction polynomiale de même degré que $P$.*

**Exercice :** Déterminer une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)$$

**Correction :** $f$ est le produit d'un polynôme de degré 3 et d'une exponentielle. On cherche donc une primitive s'écrivant sous la forme

$$F(x) = e^x Q(x) \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ i.e. } Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

On a

$$F'(x) = e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d) + e^x(3ax^2 + 2bx + c) = f(x).$$

Alors on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= x^3(ae^x) + x^2(be^x + 3ae^x) + x(ce^x + 2be^x) + (d+c)e^x \\ &= 2e^x x^3 + 3x^2 e^x - xe^x + e^x \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= x^3(ae^x) + x^2(be^x + 3ae^x) + x(ce^x + 2be^x) + (d+c)e^x \\ &= 2e^x x^3 + 3x^2 e^x - xe^x + e^x \end{aligned}$$

Par identification,

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ 3a + b &= 3 \\ c + 2b &= -1 \\ d + c &= 1. \end{aligned}$$

D'où,

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 5, \quad d = -4.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= x^3(ae^x) + x^2(be^x + 3ae^x) + x(ce^x + 2be^x) + (d+c)e^x \\ &= 2e^x x^3 + 3x^2 e^x - xe^x + e^x \end{aligned}$$

Par identification,

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ 3a + b &= 3 \\ c + 2b &= -1 \\ d + c &= 1\,. \end{aligned}$$

D'où,

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 5, \quad d = -4.$$

Finalement

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = e^x(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

# Primitives d'une fraction rationnelle

## Propriété

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $a \notin I$ alors*

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{dx} = \ln|x-a| + k \quad k \in \mathbb{R}$$

2. *Si $a \in \mathbb{C}$ tel que $a = \alpha + i\beta$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors sur tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ on a*

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + i\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration :**

1. Trivial. Il suffit de dériver le membre de droite de l'équation.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $a = \alpha + i\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\frac{1}{x-a} = \frac{x-\bar{a}}{(x-a)(x-\bar{a})} = \frac{x-(\alpha-i\beta)}{(x-(\alpha+i\beta))(x-(\alpha-i\beta))} = \frac{x-\alpha+i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$
$$= \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2}}$$

En intégrant la dernière équation on obtient

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + i\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

# Exercice

Calculer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$

**Correction :**

# Exercice

Calculer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$

**Correction :**

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[\,\cup\,]-1, 1[\,\cup\,]1, 2[\,\cup\,]2, +\infty[$$

# Exercice

Calculer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$

**Correction :**

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

$f$ admet $-1$ et 1 comme pôles d'ordre 1, et 2 comme pôle d'ordre 2. Par le théorème de la décomposition en éléments simples,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{x+2}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

# Exercice

Calculer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$

**Correction :**

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

$f$ admet $-1$ et 1 comme pôles d'ordre 1, et 2 comme pôle d'ordre 2. Par le théorème de la décomposition en éléments simples,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{x+2}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

Une primitive de la fonction $f$ est donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{18}\ln|x+2| - \frac{4}{9}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\frac{1}{x-2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

# Exercice

Calculer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + x + 1 + i}$

**Correction :**

# Exercice

Calculer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + x + 1 + i}$

**Correction :** $-i$ et $-i + 1$ sont pôles d'ordre 1 de $f$. Par le théorème de la décomposition en éléments simples

$$f(x) = \frac{1+2i}{x+1} - \frac{1+2i}{x+1-i}$$

# Exercice

Calculer une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + x + 1 + i}$

**Correction :** $-i$ et $-i + 1$ sont pôles d'ordre 1 de $f$. Par le théorème de la décomposition en éléments simples

$$f(x) = \frac{1+2i}{x+1} - \frac{1+2i}{x+1-i}$$

Une primitive de $f$ est donnée par

$$\begin{aligned} F(x) &= -(1+2i)\left(\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) + i\arctan(x+1) + k\right) \quad k \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{(1+2i)}{2}\ln(x^2+2x+2) + (2-i)\arctan(x+1) - k(1+2i). \end{aligned}$$

# Résultat général sur les intégrales de fractions rationnelles

# Résultat général sur les intégrales de fractions rationnelles

## Propriété

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\lambda x+\mu}{x^2+bx+c}$ où $(\lambda, \mu, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tel que $b^2 - 4c < 0$.*
*Alors une primitive de $f$ est une combinaison linéaire des fonctions $g : x \mapsto \ln(x^2 + bx + c)$ et $h : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)$*

# Résultat général sur les intégrales de fractions rationnelles

## Propriété

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\lambda x+\mu}{x^2+bx+c}$ où $(\lambda, \mu, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tel que $b^2 - 4c < 0$.*
*Alors une primitive de $f$ est une combinaison linéaire des fonctions $g : x \mapsto \ln(x^2 + bx + c)$ et $h : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)$*

**Démonstration :**

# Résultat général sur les intégrales de fractions rationnelles

## Propriété

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\lambda x+\mu}{x^2+bx+c}$ où $(\lambda, \mu, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tel que $b^2 - 4c < 0$.
Alors une primitive de $f$ est une combinaison linéaire des fonctions $g : x \mapsto \ln(x^2 + bx + c)$ et $h : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)$*

**Démonstration :** On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

# Résultat général sur les intégrales de fractions rationnelles

## Propriété

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\lambda x+\mu}{x^2+bx+c}$ où $(\lambda, \mu, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tel que $b^2 - 4c < 0$.*
*Alors une primitive de $f$ est une combinaison linéaire des fonctions $g : x \mapsto \ln(x^2 + bx + c)$ et $h : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)$*

**Démonstration :** On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda x}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu - b\frac{\lambda}{2}}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} + (\mu - b\frac{\lambda}{2})\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} + (\mu - b\frac{\lambda}{2})\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx}.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \ln\left|x^2+bx+c\right| + k = \ln(x^2+bx+c) + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} + (\mu - b\frac{\lambda}{2})\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx}.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \ln\left|x^2+bx+c\right| + k = \ln(x^2+bx+c)+k \quad k\in\mathbb{R}.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\omega}\right)^2}\,\mathrm{dx} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

**Changement de variable :** $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\varphi(u) = \omega u - \frac{b}{2}$ $\left(u = \frac{x+\frac{b}{2}}{\omega},\ \mathrm{du} = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{dx}\right)$.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\omega}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{du} = \frac{1}{\omega}\arctan(u) + k_1\,.$$

Alors,

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \omega \arctan\left(\frac{2x+b}{2\omega}\right).$$

Changement de variable : $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\varphi(u) = \omega u - \frac{b}{2}$ $(u = \frac{x+\frac{b}{2}}{\omega},\ \mathrm{du} = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{dx})$.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\omega}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{du} = \frac{1}{\omega}\arctan(u) + k_1\,.$$

Alors,

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \omega\arctan(\frac{2x+b}{2\omega}).$$

Finalement

$$\boxed{\int \frac{\lambda x+\mu}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \frac{\lambda}{2}\ln(x^2+bx+c) + \left(\mu - \frac{b\lambda}{2}\right)\sqrt{c-\frac{b^2}{a^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{2\sqrt{c-\frac{b^2}{a^2}}}\right) + k'.}$$

# Exercice

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{dx}}{x^3-1}$.

**Correction :**

1. **Recherche des pôles**
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
Alors 1 est pôle d'ordre 1 mais on ne peut pas trouver d'autres pôles car le polynôme $x^2+x+1$ est irréductible.

2. **Décomposition en éléments simples** Il existe $(\lambda_1, a, b) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{\lambda_1}{x-1}+\frac{ax+b}{x^2+x+1}.$$
Par identification on trouve $a=-\frac{1}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$.

Alors,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{A_1} - \frac{1}{6}\underbrace{\frac{2x+1}{(x^2+x+1)}}_{A_2} - 5\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{A_3}.$$

## 3 On calcul séparément chaque terme

$$A_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{dx} = \ln|x-1| + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$
$$A_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx} = \ln\left|x^2+x+1\right| + k_2 \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

De plus

$$A_3 = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{dx} = \frac{4}{3}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{dx}$$

1 **Changement de variable :** Soit $\varphi$ définie par $\varphi(u) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u - \dfrac{1}{2}$. Alors

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{du} = \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(u) + k_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k_3$$

2 **Conclusion**

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{dx}}{x^3-1} &= \frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{6}A_2 - 5A_3 \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| - 5\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

# Règles de Bioche

**But :** Trouver le changement de variable optimal pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus.

Soit $f$ une fraction rationnelle en cosinus et sinus avec $w(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

# Règles de Bioche

**But :** Trouver le changement de variable optimal pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus.

Soit $f$ une fraction rationnelle en cosinus et sinus avec $w(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Si $w(x) = w(-x)$ on définit la fonction $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ par

$$\varphi(u) = \arccos(u)$$

# Règles de Bioche

**But :** Trouver le changement de variable optimal pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus.

Soit $f$ une fraction rationnelle en cosinus et sinus avec $w(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Si $w(x) = w(-x)$ on définit la fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par
$$\varphi(u) = \arccos(u)$$
2. Si $w(\pi - x) = w(x)$ on définit la fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$
$$\varphi(u) = \arcsin(u).$$

# Règles de Bioche

**But :** Trouver le changement de variable optimal pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus.

Soit $f$ une fraction rationnelle en cosinus et sinus avec $w(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Si $w(x) = w(-x)$ on définit la fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par
$$\varphi(u) = \arccos(u)$$
2. Si $w(\pi - x) = w(x)$ on définit la fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$
$$\varphi(u) = \arcsin(u).$$
3. Si $w(\pi + x) = w(x)$ on définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de classe $\mathcal{C}^1$ par
$$\varphi(u) = \arctan(u).$$

4. Si deux des trois propriétés précédentes sont vérifiées on définit la fonction $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ par

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \arccos(u)$$

4. Si deux des trois propriétés précédentes sont vérifiées on définit la fonction $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ par

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \arccos(u)$$

5. Si aucune des propriétés n'est vérifiée, on utilise le changement de variable "brutal" $\varphi : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de classe $\mathcal{C}^1$ par

$$\varphi(u) = 2 \arctan(u).$$

# Exercice

Calculer l'intégrale suivante

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)}$$

# Exercice

Calculer l'intégrale suivante

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)}$$

1. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ alors $w(x) = \dfrac{\mathrm{dx}}{\sin(x)} = w(-x)$.

# Exercice

Calculer l'intégrale suivante

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)}$$

1. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ alors $w(x) = \dfrac{\mathrm{dx}}{\sin(x)} = w(-x)$.
2. **Règles de Bioche** suggèrent de poser $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par

$$\varphi(u) = \arccos(u).$$

# Exercice

Calculer l'intégrale suivante

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)}$$

1. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ alors $w(x) = \dfrac{\mathrm{dx}}{\sin(x)} = w(-x)$.
2. **Règles de Bioche** suggèrent de poser $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par
$$\varphi(u) = \arccos(u).$$
3. **Formule du changement de variable :**
$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)} = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{du} = -\int \frac{1}{\sin(\arccos(u))} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{du}.$$

4. Comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ alors $\sin(\arccos(u)) = \sqrt{1 - u^2}$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)} = -\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{du} = -\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}\,\mathrm{du}.$$

5. **Décomposition en éléments simples :** $\exists!(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{\lambda_1}{1-u} + \frac{\lambda_2}{1+u}.$$

Après identification on trouve $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

6. **Conclusion :**

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{du} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \lambda = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) + \lambda$$

$$=$$

## Autre méthode équivalente :

1. Règles de Bioche : on pose $u = \cos(x)$ alors $\mathrm{du} = -\sin(x)\,\mathrm{dx}$.
2. Alors

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)} = \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\sin(x)\mathrm{dx}}{1-\cos^2(x)} = \int -\frac{\mathrm{du}}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \lambda$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) + \lambda$$