DST Complément Mathématiques

Exercice 1 :

1) Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$U_n = \frac{1}{4n+1} \quad \text{et} \quad V_n = -\frac{1}{4n+3}$$

a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}-U_n = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+1} = \frac{-4}{(4n+5)(4n+1)} < 0$

$$V_{n+1}-V_n = \frac{-1}{4n+7} + \frac{1}{4n+3} = \frac{4}{(4n+7)(4n+3)} > 0$$

Ainsi, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante tandis que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n - V_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$

De plus on a montré que U_n est décroissante et V_n est croissante. Cela prouve que U_n et V_n sont adjacentes.

2) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(nx)\,dx$$

a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

Si n est impair, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ et donc $I_n = \frac{1}{n}$

Dans le cas où n est pair, i.e $n = 2p$ on a $I_{2p} = \frac{1}{2p}\left(1 - (-1)^p\right)$

b) Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\Rightarrow I_{4n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $I_{4n+2} = \frac{1}{2n+1}$

$n \longmapsto 4n+1$

La fonction φ est strictement croissante et on a

$U_n = I_{\varphi(n)} = \frac{1}{4n+1}$. Donc U_n est une suite extraite de I_n.

Par ailleurs si on définit $\tilde{\varphi} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la fonction $\tilde{\varphi}$

$n \longmapsto 4n+3$

est bien strictement croissante et on a $V_n = I_{\tilde{\varphi}(n)}$

On en déduit que (U_n) et (V_n) sont des suites extraites de I_n

c) On a montré que U_n et V_n sont des suites extraites de I_n. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

d) La suite I_n converge donc elle est bornée.

Exercice 2 :

1) Résolvons l'équation $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3}$ $(*)$

L'équation $(*)$ est bien définie ssi $x - 2 \geq 0$ et $2x - 3 \geq 0$

ssi $x \geq 2$ et $x \geq 3/2$

ssi $x \in [2, +\infty[$

En élevant au carré $(*)$ on trouve $x - 2 = 2x - 3$

Alors, $x = 1$. Cette solution n'appartient pas à $[2, +\infty[$ donc $(*)$ est impossible

2) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-x-6}$ (E)

L'équation (E) est bien définie ssi $x-3 \geq 0$ et $x^2-x-6 \geq 0$

ssi $x \geq 3$ et $Q(x) \geq 0$

avec $Q(x) = x^2-x-6$

Q est un trinôme du second degré dont le discriminant

$\Delta = 1-4(-6) = 25 > 0$.

Q admet deux racines réelles $x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$

Ainsi, $Q(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$

Finalement, (E) est bien définie ssi $x \in [3, +\infty[$

En élevant au carré (E) on obtient :

$x-3 = x^2-x-6$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$

D'où $x = -1$ ou $x = 3$

La seule solution valide est $x = 3$ et donc (E) admet pour solution $x = 3$

3) $|x-3| < -2$ (E)

Une valeur absolue est toujours positive donc (E) n'admet aucune solutions

4) $|x-2| > |2x-2|$ (E)

On a $|x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ si } x \geqslant 2 \\ -(x-2) \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$

et $|2x-2| = \begin{cases} 2x-2 \text{ si } x \geqslant 1 \\ -(2x-2) \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$

- Ainsi, si $x \leqslant 1$ on doit résoudre l'inéquation

$-(x-2) > -(2x-2)$.

Alors, $x > 0$. Finalement $S =]0, 1]$

- Si $x \in [1, 2]$ (E) $\Longleftrightarrow -(x-2) > 2x-2$

$\Longleftrightarrow -3x > -4$

$\Longleftrightarrow x < \frac{4}{3}$

Finalement $S = [1, 4/3[$

- Si $x \geqslant 2$ (E) $\Longleftrightarrow x-2 > 2x-2$

$\Longleftrightarrow -x > 0$

$\Longleftrightarrow x < 0$

Alors, $S = \emptyset$

Conclusion : $S =]0, 4/3[$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^{(x^2)})$

1) Le réel $f(x)$ existe ssi $x^{(x^2)} > 0$

ssi $e^{x^2 \ln(x)} > 0$

ssi $x > 0$

Ainsi, $D_f = \mathbb{R}_*^+$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $f(x) = \ln\left(x^{(x^2)}\right)$

On remarque que $f(x) = \ln\left(e^{x^2 \ln x}\right)$

$$= x^2 \ln x.$$

Ainsi, la fonction f est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}$

$$= 2x \ln x + x$$

3) Posons $v(x) = \frac{1}{3}x^3$ et $u(x) = \ln(x)$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la formule d'intégration par parties

$$\int u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int x^2 \ln x\,dx = \left[\ln(x)\frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x}\frac{1}{3}x^3\,dx$$

$$= \left[\ln(x)\frac{x^3}{3}\right] - \frac{1}{9}\int x^3\,dx$$

Ainsi, une primitive de f est la fonction $x \longmapsto \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}$

Exercice 4 :

On considère dans un repère cartésien la courbe d'équation

$4x^2 + 36y^2 - 8x - 108y + 55 = 0$ (E)

a) (E) $\Longleftrightarrow 4(x^2 - 2x) + 36(y^2 - 3y) = -55$

$\Longleftrightarrow 4\left[(x-1)^2 - 1\right] + 36\left[\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] = -55$

$$\Longleftrightarrow 4(x-1)^2+36(y-3/2)^2=30$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{15}(x-1)^2+\frac{6}{5}(y-3/2)^2=1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right)^2}+\frac{(y-3/2)^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2}=1$$

On effectue le changement de repère suivant :

$$\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-3/2 \end{cases}$$

Ainsi, dans le repère centré en $\Omega(1, 3/2)$ la conique étudiée est une ellipse

2) Écrivons à l'aide de factorielles l'expression suivante

$$\prod_{k=4}^{n^2} k^3$$

On a $\displaystyle\prod_{k=4}^{n^2} k^3 = 4^3 \times 5^3 \times 6^3 \times \cdots\cdots \times (n^2)^3$

$$= (4\times5\times6\times\cdots\cdots\times n^2)^3$$

$$= \left(\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots\cdots\times n^2}{1\times2\times3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{6^3}\left((n^2)!\right)^3$$