ESILV
ENGINEERING SCHOOL
DE VINCI PARIS NANTES

A1

Complément Mathématiques

Cours

Jean-Michel Masereel (*jean-michel.masereel@devinci.fr)*

If you trust in yourself…
and believe in your dreams…
and follow your star…
you’ll still get beaten by people who
spent their time working hard and
learning things and weren’t so lazy.
Miss Tick - The Wee Free Men

Sommaire

Introduction

Ce module a pour vocation de revoir rapidement tout ce qui a été fait dans les enseignements de spécialités maths en première et terminale. L'objectif est de consolider les bases nécessaires à la bonne poursuite de vos études d'ingénieur.

Les séances sont des séances de « Cours appliqués ». C'est-à-dire que dans une même séance d'1h30, votre enseignant vous fera à la foi du cours et des exercices. Sur certains chapitres, il n'aura certainement pas le temps de rentrer beaucoup dans les détails. C'est pourquoi, il est très fortement recommandé de travailler le contenu de ce polycopié avant chaque séance (sauf mention contraire, 1 chapitre = 1 séance). Normalement, ce ne sont que des rappels, donc vous devriez pouvoir tout comprendre par vous même. Cependant, si un point reste obscur, n'hésitez pas à demander des précisions à votre enseignant.

Avant de vous lancer dans de longues études remplies de mathématiques, vous devez maîtriser les lettres grecques. En voici une liste

Nom	Minuscule	Majuscule
Alpha	α	A
Beta	β	B
Delta	δ	Δ
Dzeta	ζ	Z
Epsilon	ε	E
Êta	η	H
Gamma	γ	Γ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Khi	χ	X
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Omicron	o	O
Phi	ϕ, φ	Φ
Pi	π	Π
Psi	ψ	Ψ
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Theta	θ	Θ
Upsilon	υ	Υ
Omega	ω	Ω
Xi	ξ	Ξ

TABLE 1 – Liste des lettres grecques

1 Suites numériques

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Suite réelle). Une *suite réelle* est une application

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array} \right.$$

On note cette application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n). Le terme u_n (sans les parenthèses) s'appelle le *terme général* de la suite.

Remarque 1.1. Une suite peut être vue simplement comme une succession de valeurs u_0, u_1, u_2, ...

Remarque 1.2. Attention de bien faire la distinction entre la suite (u_n) et le terme de rang n, u_n.

Une application u définie sur $\mathbb{N}$ seulement à partir d'un certain rang n_0 est tout de même appelée suite et se note $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Une suite peut être définie de différentes manières suivant comment est donné le terme général.

Définition 1.2 (Mode de définition). Soit (u_n) une suite réelle.

— On dit que la suite est *définie de manière récurrente* lorsque le terme général u_n est donné en fonction d'un ou plusieurs termes précédents (et éventuellement de n) : $u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots)$. Dans ce cas, le ou les premiers termes de la suite doivent être donnés.

— On dit que la suite est *définie de manière explicite* lorsque le terme général u_n est donné directement en fonction de n : $u_n = f(n)$.

— On dit que la suite est *définie de manière implicite* lorsque le terme général u_n est donné comme la solution d'une équation dans laquelle n apparaît comme paramètre. Cette équation devra n'avoir qu'une solution réelle pour chaque n fixé.

Exemple 1.1.

— La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ et $u_n = 2u_{n-1} - n^2 u_{n-2} + 3nu_{n-3}$ est définie par récurrence (triple).

— La suite (v_n) définie par $v_n = 3n$ est définie explicitement.

— La suite (x_n) telle que pour tout n, x_n est l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^{-x} = nx$ est définie implicitement.

Définition 1.3 (Suite extraite). Soit (u_n) une suite réelle et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On définit la *suite extraite de* (u_n), $(u_{\varphi(n)})$ par

$$u_{\varphi(n)} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u \circ \varphi(n) = u(\varphi(n)) \end{array} \right.$$

Le terme de « suite extraite » se légitimise par le fait que l'on sélectionne (extrait) seulement une partie des éléments de la suite (u_n).

Exemple 1.2. Les suites extraites les plus courantes, sont les suites des termes de rangs pairs et impairs. Si (u_n) est une suite réelle, alors

$$(u_{2n}) = (u_{\varphi(n)}) = u_0, u_2, u_4, \ldots$$

est la suite des termes de rangs pairs. De même

$$(u_{2n+1}) = (u_{\varphi(n)}) = u_1, u_3, u_5, \ldots$$

est la suite des termes de rangs impairs.

Définition 1.4. Soit (u_n) une suite réelle.

— On dit que (u_n) est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

— On dit que (u_n) est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

— On dit que (u_n) est *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque 1.3. De manière plus formelle, on dit qu'une suite réelle (u_n) est majorée (resp. minorée, resp. bornée) si l'ensemble de ses termes $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (resp. minoré, resp. borné).

Propriété 1.1. Une suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si il existe un réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

Démonstration.

— Montrons d'abord le sens direct, c'est-à-dire : « si (u_n) est bornée alors il existe un réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$ ».
Puisque (u_n) est bornée il existe, par définition, m et M' entiers, tels que pour tout n, $m \leq u_n \leq M'$. Posons $M = \max(|m|, |M'|)$ (on ne sait pas si m et M' sont positifs ou négatifs). Nous avons donc $u_n \leq M' \leq |M'| \leq M$ et $-u_n \leq -m \leq |m| \leq M$. Ainsi, nous avons u_n et $-u_n$ plus petits que M, donc $|u_n| \leq M$.

— La réciproque est évidente puisque $|u_n| \leq M$ implique que $-M \leq u_n \leq M$, c'est à dire que (u_n) est bornée.

Définition 1.5 (Variations). Soit (u_n) une suite réelle.

— On dit que (u_n) est *croissante* (resp. strictement croissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).

— On dit que (u_n) est *décroissante* (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).

— On dit que (u_n) est *monotone* (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (rep. strictement croissante ou strictement décroissante).

— On dit que (u_n) est *constante* (ou *stationnaire*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.

Remarque 1.4. [Méthodes]

1. Afin de déterminer le sens de variation d'une suite, il suffit souvent d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Lorsque la suite est définie par une récurrence simple $\big(u_{n+1} = f(u_n)\big)$, déterminer un intervalle dans lequel se trouvent les termes de la suite. L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ revient alors à l'étude du signe de la fonction $f(x) - x$ sur cet intervalle.
3. Lorsque tous les termes de la suite sont positifs, on peut aussi comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
4. Lorsque la suite est définie de manière explicite par $u_n = f(n)$, se rappeler qu'une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur $\mathbb{N}$ peut être utile. Il suffit donc en général d'étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (calcul de la dérivée, tableau de variation) pour en déduire les variations de (u_n).

Définition 1.6 (Opérations). Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles et λ un réel. On définit :

— $(S_n) = (u_n) + (v_n)$ la suite de terme général $u_n + v_n$

— $\lambda(u_n)$ la suite de terme général λu_n.

— $(P_n) = (u_n) \times (v_n)$ la suite de terme général $u_n \times v_n$.

1.2 Suites de référence

1.2.1 Suites arithmétiques

Définition 1.7 (Suite arithmétique). On appelle *suite arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$, la suite donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 1.2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout n et p entiers tels que $p \leq n$,

$$u_n = u_0 + nr$$
$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Démonstration. Vous pouvez la faire seul, cela vous entrainera à faire des démonstrations par récurrence. □

Remarque 1.5. [Méthode] Afin de démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de démontrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \text{ est une constante}$$

Remarque 1.6. Une suite arithmétique modélise un phénomène dont la variation (l'évolution) est constante. Par exemple, si vous mettez chaque mois la même somme d'argent sur votre compte épargne, la somme disponible sur votre compte est modélisée par une suite arithmétique.

Propriété 1.3 (Somme des termes d'une suite arithmétique). Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_1} = \frac{(u_{n_0} + u_{n_1})(n_1 - n_0 + 1)}{2}$$

Démonstration. Nous allons faire une démonstration par récurrence (sur n_1). Tout d'abord, on remarque que pour $n_1 = n_0$, la formule est vérifiée : $u_{n_1} = \frac{2u_{n_1}(n_1 - n_1 + 1)}{2}$. Supposons alors la formule vraie pour n_0 et n_1, et montrons là pour $n_1 + 1$, c'est-à-dire que l'on cherche à montrer que

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} u_k = \frac{(u_{n_0} + u_{n_1+1})(n_1 - n_0 + 2)}{2}$$

Remarquons d'abord que d'après la formule de la propriété 1.2, $u_{n_1+1} - u_{n_0} = (n_1 - n_0 + 1)r$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(u_{n_0} + u_{n_1})(n_1 - n_0 + 1) &= (u_{n_0} + u_{n_1+1} - r)(n_1 - n_0 + 1) = (u_{n_0} + u_{n_1+1})(n_1 - n_0 + 1) - r(n_1 + 1 - n_0) \\
&= (u_{n_0} + u_{n_1+1})(n_1 - n_0 + 1) - (u_{n_1+1} - u_{n_0}) \\
&= (u_{n_0} + u_{n_1+1})(n_1 - n_0 + 2) - (u_{n_0} + u_{n_1+1}) - u_{n_1+1} + u_{n_0} \\
&= (u_{n_0} + u_{n_1+1})(n_1 - n_0 + 2) - 2u_{n_1+1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n_1+1} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} u_k + u_{n+1} \\
&= \frac{(u_{n_0} + u_{n_1})(n_1 - n_0 + 1)}{2} + u_{n_1+1} \\
&= \frac{1}{2}\left((u_{n_0} + u_{n_1+1})(n_1 - n_0 + 2) - 2u_{n_1+1} + 2u_{n_1+1}\right) \\
&= \frac{(u_{n_0} + u_{n_1+1})(n_1 - n_0 + 2)}{2}
\end{aligned}$$

Remarque 1.7. La manière la plus simple pour se rappeler de cette formule est :

$$\text{Somme suite arithmétique} = \frac{(1er + dernier)(nbretermes)}{2}$$

Exemple 1.3. Grâce à cette formule, on a aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

En effet, c'est la somme d'une suite arithmétique de premier terme 0, de dernier terme n et de raison 1.

1.2.2 Suites géométriques

Définition 1.8 (Suite géométrique). On appelle *suite géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}$, la suite donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n \end{cases}$$

Propriété 1.4. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tout n et p entiers tels que $p \leq n$,

$$u_n = u_0 q^n$$
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Démonstration. Vous pouvez la faire seul, cela vous entrainera à faire des démonstrations par récurrence. □

Remarque 1.8. [Méthode] Afin de démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit d'abord de s'assurer que la suite ne s'annule jamais puis de démontrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante

Remarque 1.9. Une suite géométrique modélise un phénomène dont l'évolution se fait à taux constant. Par exemple, si vous placez une certaine somme (u_0) sur un compte épargne à un taux annuel fixe (q), la suite (u_n) vous indique la somme disponible sur votre compte l'année n.

Propriété 1.5 (Somme des termes d'une suite géométrique). Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors pour tout $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} u_k = u_{n_0} \frac{1-q^{n_1-n_0+1}}{1-q}$$

Démonstration. Nous allons faire une démonstration par récurrence (sur n_1). Tout d'abord, on remarque que pour $n_1 = n_0$, la formule est vérifiée : $u_{n_1} = u_{n_1} \frac{1-q^{n_1-n_1+1}}{1-q}$. Supposons alors la formule vraie pour n_0 et n_1, et montrons là pour $n_1 + 1$, c'est-à-dire que l'on cherche à montrer que

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} u_k = u_{n_0} \frac{1-q^{n_1-n_0+2}}{1-q}$$

Remarquons d'abord que d'après la formule de la propriété 1.4, $u_{n_1+1} = u_{n_0} q^{n_1-n_0+1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n_1+1} u_k &= \sum_{k=n_0}^{n_1} u_k + u_{n_1+1} \\
&= u_{n_0} \frac{1-q^{n_1-n_0+1}}{1-q} + u_{n_0} q^{n_1+1-n_0} \\
&= u_{n_0} \frac{1-q^{n_1-n_0+1} + (1-q)q^{n_1+1-n_0}}{1-q} \\
&= u_{n_0} \frac{1-q^{n_1-n_0+1} + q^{n_1+1-n_0} - q^{n_1-n_0+2}}{1-q} \\
&= u_{n_0} \frac{1-q^{n_1-n_0+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

Remarque 1.10. La manière la plus simple pour se rappeler de cette formule est :

$$\text{Somme suite géométrique} = 1erTerme \times \frac{1-raison^{nbreTermes}}{1-raison}$$

Exemple 1.4. Grâce à cette formule, on a aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

En effet, c'est la somme d'une suite géométrique de premier terme 1, de dernier terme q^n et de raison q.

2 Calculs dans $\mathbb{R}$

L'objectif de ce chapitre est, dans un premier temps, d'apprendre à manipuler (faire des calculs) avec de grosses sommes ou de gros produits. Dans un second temps nous apprendrons à réduire certaines expressions représentant ce que l'on appelle des coniques.

2.1 Sommes et produits

2.1.1 Notation Σ

L'objectif de cette section est d'apprendre à manipuler les grosses sommes (ou les gros produits). On entend par « grosses sommes » des sommes avec beaucoup de termes et dont les différents termes peuvent être décrit par une suite réelle.

Typiquement, on suppose que l'on a une suite $(U(n))$ définie de manière quelconque sur $\mathbb{N}$. On voudrait pouvoir manipuler la somme :

$$S = U(3)+U(4)+U(5)+U(6)+U(7)+U(8)+U(9)+U(10)+U(11)+U(12)+U(13)+U(14)+U(15)+U(16)+U(17)$$

Cette somme est très longue, elle rentre à peine dans la largeur du polycopié. Nous voulons donc une notation simple pour l'écrire :

$$S = U(3) + \ldots + U(17)$$

Utiliser les « ... », c'est pas mal, mais pas optimal. Est-ce que l'on va de 1 en 1, de 2 en 2, voire de 3 en 3 ? Il faudrait écrire les premiers termes, en espérant que cela suffise à comprendre la suite logique. Le mieux est la notation $\sum$:

$$S = \sum_{k=3}^{17} U(k)$$

Cette notation est compacte, concise et ne souffre d'aucune d'ambigüité. Elle veut dire que l'on somme de 3 à 17, avec un pas de 1 (toujours).

Maintenant que l'on a trouvé une notation à notre somme, commençons à la manipuler.

2.1.2 Manipulations

Commençons pas le changement d'indice. On peut vouloir, pour une raison ou une autre, commencer notre somme à 0 et non à 3, tout en conservant sa valeur. Pour cela, on utilise un changement d'indice :

1. On pose $l = k-3$, ou encore $k = l+3$. Ainsi, l va de 0 à 14.
2. Ainsi
$$S = \sum_{l=0}^{14} U(l+3)$$

L'indice a bien changé, il va de 0 à 14, mais la somme n'a pas changée, elle va toujours de $U(3)$ à $U(17)$.

Passons à la somme de somme. Une somme, quel que soit la manière de l'écrire, reste une somme et vous savez les manipuler depuis tout petit : on peut regrouper les termes comme on veut, découper la somme en plusieurs sous sommes. Vous savez même les factoriser ! Ainsi, si on a une autre suite réelle $(V(n))$, des entiers naturels $n_0 < n_1 < n$, un réel (constant) P :

$$\sum_{k=n_0}^{n} U(k) + \sum_{k=n_0}^{n} V(k) = \sum_{k=n_0}^{n} (U(k)+V(k))$$

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} U(k) + \sum_{k=n_1+1}^{n} U(k) = \sum_{k=n_0}^{n} U(k)$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} PU(k) = P\sum_{k=n_0}^{n} U(k)$$

C'est pour pouvoir utiliser ces propriétés, qu'en général nous avons besoin de faire des changements d'indices.

Comme évoqué plus haut, on peut décider de sommer de 2 en 2, ou de 3 en 3 ou … Comment faire, alors que le signe $\sum$ ne va que de 1 en 1 ? Comment se passe le changement d'indice ? Reprenons l'exemple précédent et supposons que l'on veuille seulement sommer les termes de rangs impairs (de $U(3)$ à $U(17)$). On peut alors écrire :

$$S_i = U(3)+U(5)+U(7)+U(9)+U(11)+U(13)+U(15)+U(17) = U(3)+U(5)+\cdots+U(17) = \sum_{k=1}^{8} U(2k+1)$$

Nous avons bien 8 termes ($k=1$ à $k=8$) et on ne prends que les termes de rangs impairs. Voyons le changement de variable : $l = k-1$ (ou $k = l+1$) :

$$S_i = \sum_{l=0}^{7} U(2(l+1)+1) = \sum_{l=0}^{7} U(2l+3)$$

L'indice va de 0 à 7, et les termes sommés vont bien de 2 en 2, de 3 à 17.

Une remarque extrêmement importante pour finir sur les sommes : L'indice de sommation (k ou l) est ce que l'on appelle une variable *muette*. Cela veut dire que vous l'appeliez, k, l, *toto*, *tata*, ou avec le prénom de votre animal de compagnie, cela ne change strictement rien au calcul de la somme. C'est juste un nom qui est donné et qui n'a d'existence qu'à l'intérieur de la somme. Une fois la somme calculée, il disparait forcément. Ainsi :

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} U(k) + \sum_{l=n_1+1}^{n} U(l) = \sum_{j=n_0}^{n} U(j)$$

2.1.3 Notation Π

La notation $\prod$ se manipule exactement comme $\sum$, sauf qu'il représente un produit (attention donc d'adapter les formules en conséquences).

2.2 Coniques

2.2.1 Introduction

Commençons par expliquer ce qu'est un cône. Tout le monde connait les cônes de glace, du coup personne ne sait ce qu'est un cône ! Qu'est-ce que c'est que cette histoire ? Un cône de glace n'est PAS un cône, c'est en réalité un demi-cône. Un cône est en réalité deux (demi-)cônes de glace collés par la pointe (voir figure 2.1).

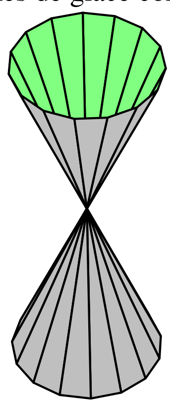


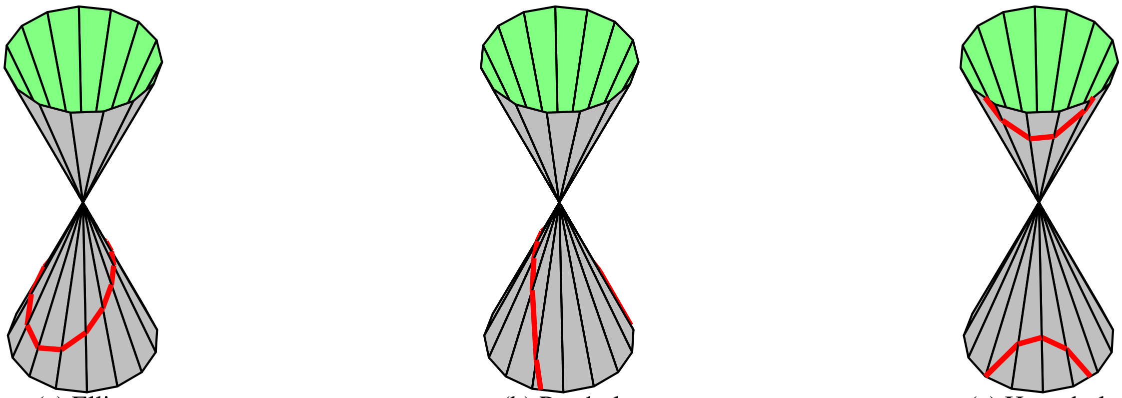
FIGURE 2.1 – Cône

Maintenant que l'on sait ce qu'est un cône, nous allons pouvoir expliquer ce qu'est une conique : Une *conique* est une figure plane obtenue par l'intersection d'un cône et d'un plan. Vous trouverez sur la figure 2.2 les trois cas possibles :

— Si le plan n'intersecte qu'une moitié du cône et que l'intersection donne une courbe fermée, nous avons une *ellipse* (lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe du cône, on obtient un cercle).

— Si le plan n'intersecte qu'une moitié du cône, mais que l'intersection est infinie (courbe ouverte) (c'est le cas exclusivement lorsque le plan est parallèle aux bords du cône), nous avons une *parabole*.

— Si le plan intersecte les deux moitiés du cône (c'est le cas lorsque le plan n'est pas parallèle au bord du cône), nous avons une *hyperbole*.



(a) Ellipse (b) Parabole (c) Hyperbole

FIGURE 2.2 – Les coniques

2.2.2 Équations cartésiennes

L'objectif de ce chapitre n'est pas d'étudier en détail les coniques, mais de savoir manipuler les équations des coniques. Nous allons donc définir les coniques à partir de leurs équations générales. L'objectif sera alors d'être capable de calculer leurs équations réduites.

Définition 2.1 (Conique). Dans le cadre de ce module, nous définissons une conique comme étant une courbe du plan ayant pour équation, dans un repère :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

Où a, b, c, d, e sont cinq réels non tous nuls et tels que a et b ne sont pas tous les deux nuls.

L'objectif étant de donner ce que l'on appelle la « forme réduite » de l'équation de la conique, nous devons en donner une définition.

Définition 2.2 (Ellipse, Parabole, Hyperbole, Équation réduite).

— On appelle *parabole* toute conique qui a, dans un repère adapté, pour équation $y^2 = 2px$.

— On appelle *ellipse* toute conique qui a, dans un repère adapté, pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

— On appelle *hyperbole* toute conique qui a, dans un repère adapté, pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Les équations précédentes sont appelées *équation réduites* des coniques.

2.2.3 Mise sous forme réduite

Les propriétés suivantes, et surtout les démonstrations, vont nous permettre de comprendre comment, à partir d'une équation générale de conique, obtenir l'équation réduite.

Propriété 2.1. Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère cartésien et $\mathscr{C}$ une conique d'équation $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$.
Si $ab=0$ (c'est-à-dire a ou b est nul), alors la conique est une parabole (éventuellement dégénérée).

Démonstration. Supposons que $a=0$ (le cas $b=0$ se traite de la même manière).

Si $c=0$: Dans ce cas, l'équation devient $by^2+dy+e=0$, qui est simplement un polynôme du second degré.

— Si ce polynôme possède deux racines y_1 et y_2, alors la courbe est réduite à deux droites d'équations $y=y_1$ et $y=y_2$.
— Si ce polynôme possède une racine (double) y_1, alors la courbe est réduite à une droite d'équation $y=y_1$.
— Si ce polynôme ne possède pas de racine, la courbe est vide.

Ces trois cas particuliers sont ce que l'on appelle des paraboles dégénérées (cas où le plan est tangent au cône, voire ne l'intersecte pas).

Si $c\neq 0$: Dans ce cas, l'équation devient $by^2+cx+dy+e=0$. En mettant la partie en y sous forme canonique, nous pouvons ré-écrire l'équation sous la forme :

$$\left(y+\frac{d}{2b}\right)^2=-\frac{c}{b}\left(x+\frac{d^2-4eb}{4bc}\right)$$

En posant $p=-\frac{c}{2b}$, on fait le changement de repère suivant :

$$\begin{cases} X &= x+\frac{d^2-4eb}{4bc} \\ Y &= y+\frac{d}{2b} \end{cases}$$

dont la nouvelle origine est $\Omega\left(\frac{4eb-d^2}{4bc};-\frac{d}{2b}\right)$. Dans ce nouveau repère, la courbe est d'équation $Y^2=2pX$, qui est bien l'équation réduite d'une parabole.

Remarque 2.1. On vous a dit au lycée que les paraboles avaient pour équation $y=ax^2+bx+c$. Si vous comparez bien les choses, vous remarquez que les équations sont les mêmes. Voyons sur un exemple comment écrire l'équation réduite d'une parabole de « type lycée ».

Exemple 2.1. Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère cartésien du plan et $\mathscr{P}$ la courbe d'équation $y=3x^2+4x-5$. Donner l'équation réduite.

On reprend les calculs de la démonstration précédente. Nous avons alors successivement

$$y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}-5=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{19}{3}$$
$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}\left(y+\frac{19}{3}\right)$$

On effectue alors le changement de repère

$$\begin{cases} Y &= x+\frac{2}{3} \\ X &= y+\frac{19}{3} \end{cases}$$

Dans ce repère, l'équation devient

$$Y^2 = 2 \times \frac{1}{6}X$$

Ce qui est bien une équation réduite d'une parabole.

Remarque 2.2. Vous remarquerez qu'au lycée, les paraboles étaient « debout » ($y = x^2$), alors que maintenant elles sont « couchées » ($x = y^2$).

Propriété 2.2. Soit $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$ un repère cartésien et $\mathscr{C}$ une conique d'équation $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. Si $ab \neq 0$ (c'est-à-dire a et b non nul), alors la conique est

— Une ellipse (éventuellement dégénérée) si $ab > 0$

— Une hyperbole (éventuellement dégénérée) si $ab < 0$

Démonstration. On commence par mettre les parties en x et les parties en y sous forme canonique :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 + e - \frac{c^2}{4a} - \frac{d^2}{4b}$$

Ainsi, en posant $k = \frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e$ et en faisant le changement de repère

$$\begin{cases} X &= x+\frac{x}{2a} \\ Y &= y+\frac{d}{2b} \end{cases}$$

dont l'origine est $\Omega\left(-\frac{c}{2a}; -\frac{d}{2b}\right)$, on obtient une équation de la forme

$$aX^2 + bY^2 = k$$

Deux cas se présentent alors, suivant les signes de a et b :

Si $ab > 0$: Dans ce cas a et b ont le même signe.

— Si $k = 0$, l'équation a pour unique solution $X = Y = 0$ et la conique est réduite au point Ω (c'est le cas lorsque le plan intercepte le cône au niveau de l'étranglement).

— Si k est de signe opposé à celui de a et b, l'équation n'a pas de solution, donc la conique est vide.

— Si k est de même signe que a et b, alors en divisant par k, nous avons l'équation

$$\frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1 = \frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2}$$

En effet, a, b et k ayant le même signe, les fraction $\frac{k}{a}$ et $\frac{k}{b}$ sont strictement positives. Nous avons alors bien l'équation réduite d'une ellipse.
Les réels α et β sont appelés *demi-axe* horizontal et vertical. Si $\alpha = \beta$, l'ellipse est un cercle, mais on reviendra là-dessus plus tard.

Si $ab < 0$: Dans ce cas, a et b sont de signe contraires.

— Si $k=0$, l'équation devient

$$Y^2 = -\frac{a}{b}X^2 \Leftrightarrow Y = \pm X\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

La conique est donc réduite à la réunion de deux droites.

— Si $k \neq 0$, alors il est soit du signe de a, soit du signe de b. Dans les deux cas, en divisant par k et en posant $\alpha^2 = \pm\frac{k}{a}$ et $\beta^2 = \pm\frac{k}{b}$ (suivant les signes), on obtient

$$\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 1$$

Ces deux équations, à un changement de repère prêt, sont les équations réduite d'une hyperbole.

Remarque 2.3. Tout comme pour les paraboles, vous connaissez les hyperboles depuis la seconde. On vous les a présentées comme étant les courbes d'équations $y = \frac{1}{x}$. Cela revient dont à $xy - 1 = 0$. C'est justement le type d'équation que l'on s'était interdit dans ce module. Voyons sur l'exemple suivant comment retrouver sa forme réduite.

Exemple 2.2. Déterminer les formes réduites des coniques suivantes

1. $y = \frac{1}{x}$
2. $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$
3. $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 0$

1. Nous avons vu dans la remarque que l'équation devient $xy = 1$. Nous remarquons alors que l'on peut obtenir ce produit grâce aux identités remarquables bien connus :

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

Ainsi, l'équation est

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{2^2} - \frac{(x-y)^2}{2^2} = 1$$

En posant $X = x+y$ et $Y = x-y$, nous obtenons l'équation réduite d'une hyperbole :

$$\frac{X^2}{2^2} - \frac{Y^2}{2^2} = 1$$

2. Tout comme dans la démonstration précédente, on met l'équation sous forme canonique :

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = x^2 - 4x + 4(y^2 + 2y) - 17 = (x-2)^2 - 4 + 4(y+1)^2 - 4 - 17$$

L'équation est donc

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 25$$

On pose alors $\alpha = 5$, $\beta = \frac{5}{2}$, $X = x-2$ et $Y = y+1$ (nouvelle origine du repère : $\Omega(2\,;-1)$). L'équation est alors

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$$

qui est l'équation réduite d'une ellipse.

3. Même chose que précédemment

$$4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 4(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 2y) - 41 = 4(x+1)^2 - 4 - 9(y-1)^2 + 9 - 41$$

L'équation est donc
$$4(x+1)^2 - 9(y-1)^2 = 36$$
On pose alors $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $X = x+1$ et $Y = y-1$ (nouvelle origine du repère : $\Omega(-1\,;1)$). L'équation est alors
$$\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$$
qui est l'équation réduite d'une hyperbole.

Remarque 2.4. [Résumé]

- Au final, il est facile de voir, à partir de l'équation générale, à quel type de conique nous avons à faire :
  - Si un seul terme est au carré, c'est une parabole.
  - Si les carrés sont additionnés, c'est une ellipse.
  - Si les carrés sont soustraits, c'est une hyperbole.
- Dans les trois cas, la méthode est la même : on met la partie « carrée » sous forme canonique.

2.2.4 Cercles

Nous avons évoqué en début de section que les cercles sont des ellipses particulières. Ce sont simplement des ellipses dont les deux demi-axes sont égaux. Ainsi l'équation cartésienne d'un cercle est simplement
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$
On écrit en général l'équation sous cette forme :
$$x^2 + y^2 = R^2$$
Où $R > 0$ est le rayon du cercle. Le centre du cercle est le point $O(0;0)$ et toutes les droites passants par l'origine sont axe de symétrie. Bien évidement, cette équation est donnée dans le bon repère. Charge à vous, en exercice, de déterminer, à partir de l'équation générale, le centre et le rayon du cercle.

Exemple 2.3. Soit un repère cartésien $\left(O\,; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$ et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$. Déterminer la nature de cette courbe.

Comme d'habitude, on met l'équation sous forme canonique :
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = (x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 9$$
Donc l'équation devient
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$
On reconnait alors immédiatement l'équation du cercle de centre $\Omega(2;3)$ et de rayon 2.

Exemple 2.4. Soit $\left(O\,; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

Le fait que le repère soit orthonormé a son importance : cela veut dire que l'on peut parler de produit scalaire entre les vecteurs (et de distance). Nous savons (depuis le collège) qu'un cercle de diamètre $[AB]$ peut être vu comme l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit droit. Dit autrement, cela veut dire que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul. Or nous avons $\overrightarrow{MA}(x - x_A\,; y - y_A)$ et $\overrightarrow{MB}(x - x_B\,; y - y_B)$. Notons que le centre du cercle a pour coordonnées $\Omega\left(\frac{x_A + x_A}{2}\,; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ et que le rayon est tel que $R^2 = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}\left((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2\right)$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
0 &= (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = x^2 - (x_A + x_B)x + x_A x_B + y^2 - (y_A + y_B)y + y_A y_B \\
&= \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + x_A x_B - \frac{1}{4}(x_A + x_B)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + y_A y_B - \frac{1}{4}(y_A + y_B)^2 \\
&= \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(x_A - x_B)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(y_A - y_B)^2
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien l'équation du cercle de centre Ω et de rayon R.

3 Système linéaires

Ce chapitre étant très simple, il se fera sur une demi séance. Nous allons voir comment résoudre un système linéaire à deux équations et deux inconnues. Puis nous verrons l'interprétation dans le plan.

3.1 Définitions

Définition 3.1 (Système linéaire à deux équations et deux inconnues). On appelle *système linéaire à deux équations et deux inconnues* un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & e \\ cx+dy & = & f \end{array}\right.$$

Un vecteur $(x;y)$ est dit *solution* du système si et seulement si il vérifie chacune des deux équations.
On appelle *système d'équations homogènes* le système obtenu avec $e=f=0$.

Remarque 3.1.

— Le vecteur nul est toujours solution d'un système homogène.

— Si $(x;y)$ est solution d'un système homogène, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $(\lambda x;\lambda y)$ est solution du même système homogène.

— Si $(x_1\,;y_1)$ et $(x_2\,;y_2)$ sont solutions d'un système homogène, alors le vecteur $(x_1+y_1\,;y_1+y_2)$ est solution du même système homogène.

3.2 Résolution

Il existe deux méthodes de résolution. La première est celle que vous avez vu dans le secondaire. La seconde est celle que vous verrez en S2, mais que l'on va expliquer dès maintenant !

3.2.1 Méthode de substitution

Le principe est très simple. On écrit x (ou y) en fonction de y (ou x) à partir de l'une des deux équations, et on l'injecte dans la seconde. On obtient alors une simple équation à une inconnue, y (ou x), que vous savez donc résoudre. On calcule alors finalement x (ou y). Voyons un exemple :

Exemple 3.1. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 3 \\ 2x-3y & = & 4 \end{array}\right.$$

Nous avons successivement

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 3 \\ 2x-3y & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-\frac{2}{3}y \\ 2\left(1-\frac{2}{3}y\right)-3y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-\frac{2}{3}y \\ y & = & -\frac{6}{13} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{17}{13} \\ y & = & -\frac{6}{13} \end{array}\right.$$

3.2.2 Méthode de Gauss

Cette méthode, qui peut vous paraître moins pratique car vous en avez pas l'habitude, se révèlera extrêmement efficace dès que vous aurez plus d'équations et d'inconnues (la substitution étant alors à bannir !)

Le principe est d'effectuer une combinaison linéaire (multiplier par une constante et additionner) des deux équations, afin d'éliminer l'une des deux variables. On se retrouve alors encore une fois avec une équation d'une seule inconnue. On termine alors en injectant le résultat dans l'une des deux équations. Voyons le même exemple que précédemment.

Exemple 3.2. Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x+2y &= 3 \\ 2x-3y &= 4 \end{cases}$$

Multiplions d'abord la première équation par 2 et la seconde par 3, afin d'avoir le même coefficient devant le x. Il suffira alors ensuite de soustraire les deux équations pour éliminer x :

$$\begin{cases} 3x+2y &= 3 \\ 2x-3y &= 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x+4y &= 6 \\ 6x-9y &= 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y &= 3 \\ 13y &= -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= -\frac{6}{13} \\ 3x-\frac{12}{13} &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= \frac{17}{13} \\ y &= -\frac{6}{13} \end{cases}$$

3.3 Interprétation

Vous avez bien sûr remarqué que vous connaissiez déjà les équations linéaires : ce sont simplement les équations de droite. Une équation linéaire homogène est tout simplement l'équation d'une droite linéaire.

Ainsi, si un vecteur $(x;y)$ est solution d'une équation linéaire, cela revient simplement à dire que le point $M(x;y)$ est sur la droite correspondante.

Finalement, si un vecteur $(x;y)$ est solution d'un système linéaire, alors le point $M(x;y)$ est sur les deux droites, il est donc à l'intersection des deux droites.

Cette vision géométrique nous permet de tout de suite comprendre qu'il ne peut y avoir que 3 types de solutions à un système linéaire.

Propriété 3.1. Un système linéaire possède soit

1. Aucune solution. Dans ce cas, les couples $(a;b)$ et $(c;d)$ sont proportionnels, mais les triplets $(a;b;e)$ et $(c;d;f)$ ne le sont pas.
2. Une infinité de solution. Dans ce cas, les triplets $(a;b;e)$ et $(c;d;f)$ sont proportionnels.
3. Une unique solution. Dans ce cas, les couples $(a;b)$ et $(c;d)$ ne sont pas proportionnels.

Démonstration. Cela provient tout simplement de l'interprétation graphique. Lorsque l'on a deux droites, il n'y a que trois possibilités :

1. Les droites sont parallèles et non confondues.
2. Les droites sont confondues.
3. Les droites sont sécantes.

4 Calcul combinatoire

Ce chapitre se fera sur une demi-séance (et pourra éventuellement déborder un peu sur la séance suivante).
Le but, ici, est « d'apprendre à compter ». C'est-à-dire que vous allez apprendre à dénombrer certains objets : combien j'ai de mains de poker avec une paire ? Combien il y a t-il de chemins différents dans un arbre ? Combien j'ai de mots de longueur donnée avec trois lettres identiques ? etc.

Pour cela nous allons passer rapidement en revue des définitions de bases sur les ensembles finis.

4.1 Ensembles finis

Définition 4.1 (Produit cartésien). Soit E et F deux ensembles. On appelle *produit cartésien de E et F*, que l'on note $E \times F$, l'ensemble des éléments qui s'écrivent $(x;y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple 4.1. Vous avez déjà rencontré des produits cartésiens. L'ensemble des points de l'espace est un produit cartésien. En effet, tout point de l'espace possède deux coordonnées x et y que l'on note $(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
D'ailleurs, lorsque $E = F$, on note simplement $E \times E = E^2$.

Définition 4.2 (Ensemble des parties). Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de E*, que l'on note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de E.

Remarque 4.1. Soit E un ensemble. Alors $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(E)$.
Attention à la différence entre le symbole « $\subset$ » et le symbole « $\in$ ».

Définition 4.3 (Complémentaire). Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle *complémentaire de A dans E*, que l'on note $\overline{A}$ ou $\complement_E(A)$ ou $E \backslash A$, le sous-ensemble de E contenant tous les éléments qui ne sont pas dans A : $\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$.

Définition 4.4. Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. On note $A \backslash B$ (on lit « A privé de B ») l'ensemble $A \backslash B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

Ce sont tous les éléments qui sont dans A et pas dans B.

Définition 4.5 (Cardinal). On dit qu'un ensemble E est *fini* lorsque E possède un nombre fini d'éléments.

On appelle *cardinal de E*, que l'on note $Card(E)$ ou $\#E$ ou encore $|E|$ le nombre d'éléments de E.

Par convention, on pose $Card(\emptyset) = 0$

Propriété 4.1. Soit E un ensemble fini et $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors A est un ensemble fini et $Card(A) \leq Card(E)$. De plus $Card(A) = Card(E) \Leftrightarrow A = E$.

Propriété 4.2. Soit E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E. Alors :

— $A \cup B$ est un ensemble fini.

— $A \cap B$ est un ensemble fini.

— $\overline{A}$ est un ensemble fini.

— $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

— $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$.

— $Card\left(\overline{A}\right) = Card(E) - Card(A)$.

Démonstration. Nous allons nous attarder sur deux de ces propriétés qui sont particulièrement importantes :

— $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$. Il est clair que si A et B sont deux ensembles disjoints (pas d'éléments en communs), alors le nombre d'éléments dans la réunion des deux est égal à la somme du nombre d'éléments dans chacun de ces ensembles. Par exemple, si vous réunissez une classe de 30 élèves avec une classe de 25 élèves, vous obtenez 55 élèves !
Si par contre, les deux ensembles ont des éléments en communs, il faut veiller à ne pas compter deux fois ceux qui sont dans l'intersection. Par exemple, si vous avez une classe de 30 élèves dont 5 sont nés en février, et que dans l'école 150 élèves sont nés en février. Alors, après avoir réunis tous les élèves de la classe avec les élèves de l'école nés en février, vous n'obtenez pas 180 élèves, mais 175. Car 5 élèves se trouvent dans les deux groupes.

— $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$. Voyons ce qu'il se passe sur un exemple (cela n'est pas une démonstration). Supposons que $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$. Alors les éléments de $A \times B$ sont les éléments qui s'écrivent $(a; b)$, avec $a \in A$ et $b \in B$. Combien il y en a-t-il ? Pour chaque choix de a, j'ai deux choix pour b. Et j'ai trois choix pour a, donc au total $2 \times 3 = 6$ choix :

$$(a_1; b_1); (a_1; b_2); (a_2; b_1); (a_2; b_2); (a_3; b_1); (a_3; b_2)$$

4.2 Listes, arrangements et combinaisons

4.2.1 $p-$uplet

Définition 4.6 ($p-$uplet). Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *$p-$uplet* (ou *$p-$liste*) d'éléments de E, un élément de $E^p = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$.

Propriété 4.3. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors le nombre de $p-$uplets de E est

$$\underbrace{n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$$

Démonstration. Un $p-$uplet est simplement un élément de E^p. Or nous avons vu précédemment que $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$, donc $Card(E^2) = Card(E)^2$ et de proche en proche, nous avons $Car(E^p) = Card(E)^p$. □

Exemple 4.2.
1. Considérons 20 lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est un élément de $E = \{P; F\}$. Le résultat des 20 lancers est un 20-uplet de E. Le nombre de résultat possible est donc 2^{20}.
2. De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ? L'ensemble E des cartes est de cardinal 52. On prend 5 fois une carte (avec répétition possible) de ce jeux, on construit donc un 5-uplet. Il y a donc 52^5 tirages possibles.

Remarque 4.2. Dans un $p-$uplet :
1. l'ordre des éléments est important : dans le premier exemple précédent, tirer Pile puis Face n'est pas la même chose que tirer Face puis Pile.
2. les répétitions sont possibles : sur les 20 lancers il y a forcément eu plusieurs Piles et plusieurs Faces.

C'est pour cela que les $p-$uplets sont utilisés pour modéliser les tirages **successifs avec remise**.

Propriété 4.4 (Nombre de parties). Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments. Alors E possède 2^n parties (c'est-à-dire $Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)}$).

Démonstration. Comment créer une partie A de E ? Pour chaque élément de E, on a le choix entre le mettre dans A, ou pas. Donc pour chaque élément, nous avons deux choix possibles. Puisqu'il y a n éléments, nous avons donc bien 2^n choix possibles. □

Remarque 4.3. On remarque que le nombre de partie d'un ensemble à n éléments est égal au nombre de n-uplets pris dans un ensemble à 2 éléments. En réalité la démonstration précédente repose sur ce fait : pour chaque éléments, nous avons fait un choix parmi 2 : « prendre » et « pas prendre ». Si on note chacun de ces choix successivement, nous obtenons bien un n-uplet d'éléments de $\{prendre; pasprendre\}$.
Nous pouvons remplacer « prendre » par 1 et « pas prendre » par 0. Nous obtenons alors un n-uplet de $\{0, 1\}$.
On peut aussi le voir comme la descente d'un arbre de profondeur n, dont chaque nœud donne deux choix : gauche ou droite.
On peut encore aussi voir cela comme écrire un mot de longueur n, avec un alphabet de seulement 2 éléments.
Enfin, on peut considérer que pour chacun des choix, on fait appel à une épreuve de Bernoulli (tirage à pile ou face).
Bref, au final, construire une partie de E, c'est construire un n-uplet sur un ensemble à deux éléments.

4.2.2 Arrangements

Définition 4.7 (Arrangement). Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *p-arrangement* d'éléments de E tout $p-$uplet d'éléments distincts.

Définition 4.8 (Factoriel). Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments tous distincts. On appelle *factoriel de n*, le nombre, que l'on note $n!$, de $n-$uplets de E constitué d'éléments tous distincts. C'est-à-dire le nombre de n-arrangements de E.

Propriété 4.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
Par convention, on pose $0! = 1$.

Démonstration. Faisons une démonstration par récurrence. Si $n = 1$, il n'y a qu'un seul choix possible pour le 1-uplet de E. Donc $1! = 1$.
Supposons que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Combien peut-on former de $(n+1)$-arrangements de E ? Je prends un premier élément de E (parmi les $n+1$ possibles), il me reste à construire un n-arrangement sur les éléments restant (au nombre de n). J'ai donc au total, $(n+1)$ choix pour le premier élément et $1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour les suivants. Soit $1 \times 2 \times \cdots \times n \times (n+1)$. □

Remarque 4.4. En général, on raisonne ainsi : pour le premier élément, j'ai n choix, pour le second, $(n-1)$ (car doit être différent du premier), pour le troisième $(n-2)$, etc. jusqu'à ne plus avoir qu'un choix possible. D'où $n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 2 \times 1$.

On remarque aussi, grâce à la démonstration précédente, que $(n+1)! = (n+1)n!$. Propriété fort utile qui peut d'ailleurs servir de définition de $n!$.

Propriété 4.6. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors le nombre de $p-$arrangements de E est

$$\begin{array}{rl} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{array}$$

Démonstration.

— Il est clair que si $p > n$ alors il est impossible de prendre p éléments distincts de E.

— Si $p \leq n$, construire un $p-$arrangment, c'est choisir un premier élément de E (n choix possibles), puis un deuxième distinct du premier ($n-1$ choix possibles)... et enfin un p^{e} élément distinct des précédents ($n-p+1$ choix possibles). D'où au total $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque 4.5. Puisque deux éléments quelconques d'un $p-$arrangement sont forcément distincts, on dit que le tirage se fait sans remise. Là encore, l'ordre du tirage est important. C'est pourquoi les arrangements sont utilisés pour modéliser les tirages **successifs sans remise**.

Exemple 4.3. Reprenons notre exemple du jeu de carte. De combien de façons peut-on tirer successivement 5 cartes, sans remise, d'un jeu de 52 cartes ? La formule nous donne $\frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$.

Définition 4.9 (Permutation). Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle *permutation de E* un $n-$arrangement de E, c'est-à-dire un arrangement à n éléments de E.

Propriété 4.7. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors il y a $n!$ permutations de E.

Démonstration. Nous avons $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ □

Remarque 4.6. C'est en réalité la définition que nous avons donné de $n!$: c'est le nombre de n-arrangements, donc le nombre de permutations !

4.2.3 Combinaisons

Définition 4.10. Soit E un ensemble fini. On appelle *$p-$combinaison de E* tout sous-ensemble de E de cardinal p.

Remarque 4.7. Une $p-$combinaison est un sous-ensemble de E. Or dans un ensemble il n'y a pas d'ordre (l'ensemble $\{P, F\}$ est le même que $\{F; P\}$). De plus, il n'y a pas de répétition possible. Les combinaisons sont donc utilisées pour modéliser les tirages **simultanés (sans remise)**.

Propriété 4.8. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $p-$combinaisons de E.

Démonstration.
- Si $p > n$ alors il est évident qu'il n'existe aucune partie de E à p éléments. De plus dans ce cas $\binom{n}{p} = 0$.
- Si $p \leq n$. Notons C_n^p le nombre de $p-$combinaisons de E. Nous voulons montrer que $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, c'est-à-dire $\frac{n!}{(n-p)!} = C_n^p \times p!$. À gauche de cette égalité, nous reconnaissons le nombre de $p-$arrangements de E. Or construire un p-arrangement de E cela revient à :
  - choisir une $p-$combinaison X quelconque de E (C_n^p possibilités)
  - puis choisir une façon d'ordonner les éléments de X, c'est-à-dire construire un $p-$uplet d'éléments de X ($p!$ possibilités).

  Nous avons donc bien un total de $C_n^p \times p!$ $p-$arrangements possibles. Or nous savons que le nombre de $p-$arrangements est $\frac{n!}{(n-p)!}$, d'où $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$.

Exemple 4.4. Combien existe-t-il de mains au poker ? Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes. Une main est constituée de 5 cartes (distinctes) dont l'ordre importe peu (même si elles sont distribuées une à une). Nous sommes donc face à un tirage simultané. Le nombre de mains est donc de $\binom{52}{5} = \frac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2} = 52 \times 51 \times 49 \times 10 \times 2$.

Propriété 4.9 (Relation de Pascal). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors
- $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$.
- Pour tout $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Pour tout $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Démonstration. — Il suffit d'écrire la définition de $\binom{n}{p}$ pour $p = 0, 1, 2, n, n-1, n-2$.

— De même, c'est direct à partir de la définition.

— Cette fois, nous allons faire deux démonstrations.

Calculatoire :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!(n-p)}{(p+1)p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\left(1 + \frac{n-p}{p+1}\right) = \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p)} \\ &= \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

Par dénombrement : Comment choisir $p+1$ éléments parmi $n+1$?

— On en prend un en particulier, puis on en prend p parmi les n restants ($\binom{n}{p}$).

— On ne prend pas le particulier, du coup il faut en prendre $p+1$ parmi les n restants ($\binom{n}{p+1}$).

D'où le résultat.

Remarque 4.8. Cette dernière propriété est à l'origine de la construction de ce que l'on appelle le triangle de Pascal. Il est fortement conseillé de connaitre par cœur les 5 premières lignes de ce triangle :

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Propriété 4.10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration. La démonstration peut se faire de manière calculatoire, à condition de connaitre le « binôme de Newton », en effet

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Voyons une démonstration par une méthode de dénombrement : Nous savons que $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E (de cardinal n) ayant k éléments. Donc la somme est tout simplement le nombre de parties de E. Or nous avons vu plus haut que ce nombre de parties de E était égale à 2^n. D'où le résultat. □

Le plus dur dans le dénombrement est de bien déterminer dans quel cas on est et donc quelle formule utiliser. Vous trouverez table 4.1 un récapitulatif qui devrait vous aider.

Type de tirage	Modèle	Formule	Commentaires
Tirage successif avec remise.	$p-uplets$	n^p	L'ordre est important. On peut tirer plusieurs fois la même valeur. p quelconque.
Tirage successif sans remise.			L'ordre est important. On ne peut pas tirer plusieurs fois la même valeur. $p \leq n$
Ré-ordonnancement de tous les éléments.			L'ordre est important. On tire toutes les valeurs une et une seule fois. $p = n$
Tirage simultané.			L'ordre n'est pas important. On ne peut pas tirer plusieurs fois la même valeur. $p \leq n$.

TABLE 4.1 – Dénombrements.

5 Équations et inéquations

Ce chapitre se fera sur deux séances. L'objectif est que vous soyez capable de résoudre tout type d'équations : premier degré, second degré, avec des valeurs absolues, avec des racines carrées. Mais aussi tout type d'inéquations.

Il n'y a pas vraiment moyen de faire un cours (avec définitions et théorèmes) là dessus. Nous allons simplement tenter de passer en revue un certain nombre d'erreurs que vous faites fréquemment.

5.1 Équations

5.1.1 Premier degré

1. Attention, lorsque vous divisez par une expression, celle-ci ne doit pas être nulle. Cela retire donc souvent des solutions possibles.
2. Vous savez que $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. Mais certains ne comprennent pas ce que cela veut dire réellement : la valeur absolue dépend du signe de ce qu'il y a entre les barres. Ainsi, par exemple

$$|2x-4| = 2x-4 \qquad \text{Si } 2x-4 \geq 0 \text{ (c'est-à-dire } x \geq 2\text{, et non si } x \geq 0\text{).}$$
$$|2x-4| = 4-2x \qquad \text{Si } 2x-4 \leq 0 \text{ (c'est-à-dire } x \leq 2\text{, et non si } x \leq 0\text{).}$$

3. Toute l'expression qui est sous une racine carrée doit forcément être positive ou nulle.

5.1.2 Second degré

Pour résoudre une équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas possibles :

Le discriminant est strictement positif : Alors l'équation possède exactement deux solutions réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le discriminant est strictement négatif : Alors l'équation ne possède pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le discriminant est nul : Alors l'équation possède une unique solution (double) réelle qui est :

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

Dans ce cas, cela veut dire que le polynôme était tout simplement une identité remarquable :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

Dans ce cas, afin de montrer que vous maitrisez vos identités remarquables et que vous les reconnaissez du premier coup d'œil, ne surtout pas écrire le calcul du discriminant sur votre copie (même si vous l'avez fait sur votre brouillon...) et écrire directement la forme factorisée, pour en déduire la racine unique.

Pour un polynôme du second degré (et vous verrez plus tard pour tout polynôme), il existe un lien entre les coefficients et les racines :

Propriété 5.1. Soit S et P deux réels. Résoudre le système d'inconnues α et β

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= S \\ \alpha\times\beta &= P \end{cases}$$

revient à déterminer les racines de

$$X^2 - SX + P$$

Démonstration. — Si α et β sont solutions du système, alors la première ligne nous donne $\beta = S-\alpha$, que l'on injecte dans la seconde pour trouver $\alpha(S-\alpha) = P$, c'est-à-dire $\alpha^2 - S\alpha + P = 0$.

— Réciproquement, si α et β sont solution de $X^2 - SX + P = 0$, alors

$$X^2 - SX + P = (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$$

En identifiant les coefficients, nous avons bien le système.

Remarque 5.1. Cette propriété nous permet de trouver la seconde racine connaissant la première (et bien sûr le polynôme).
Cela permet aussi parfois (et pour les plus entrainés) de déterminer directement les racines (entières) d'un polynôme (à coefficients entiers), sans passer par le calcul du discriminant. En effet, il est parfois plus simple de trouver deux entiers dont on connait la somme et le produit. Par exemple, il est aisé de trouver que deux entiers dont la somme fait 5 et le produit fait 6 sont … 2 et 3 ! Ainsi, les racines de $X^2 - 5X + 6$ sont 2 et 3 (pas besoin de calculer le discriminant pour cela).

5.2 Inéquations

1. Lorsque l'on multiplie ou divise une inégalité par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité. Cela veut dire que si je multiplie une inégalité par une expression dont je ne connais pas le signe (par exemple $2x-4$), je dois distinguer deux cas :
   — Mon expression est positive (par exemple $x > 2$). On fait alors attention que les solutions trouvées sont cohérentes avec le fait que l'expression est positive.
   — Mon expression est négative (par exemple $x < 1$). On fait alors attention que les solutions trouvées sont cohérentes avec le fait que l'expression est négative.

   On réunit alors les deux ensembles de solutions trouvés.
2. Attention de ne pas diviser par 0 !
3. Soit un polynôme $ax^2 + bx + c$.
   — Si son discriminant est positif (donc deux racines réelles distinctes), alors, le polynôme est du même signe que a entre les deux racines et de signe opposé en dehors des racines.
   — Si son discriminant est nul (donc une unique racine), alors, le polynôme est du même signe que a.
   — Si son discriminant est négatif (donc pas de racine réelle), alors le polynôme est du même signe que a.

6 Racines n-ièmes

6.1 Motivations

Rappel 6.1. Pour tous entiers m et n strictement positifs et tout réel x, nous avons

$$x^{m+n} = x^m x^n$$
$$x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$$
$$\text{Si } x \neq 0\ x^0 = 1$$

Ainsi, en prenant $m = 0$, pour x non nul, nous avons

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Les formules précédentes sont donc aussi valables pour m et n négatifs (à condition que x soit non nul). Finalement, nous savons définir la somme et la différence des puissances (entières).
Cependant, nous avons aussi

$$X^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m$$

Nous savons donc définir le produit de puissances. Peut-on alors définir le quotient de puissances ?

Si oui, afin que les propriétés précédentes restent valables, nous devons avoir

$$x = x^1 = x^{\frac{n}{n}} = (x^n)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on voudrait pouvoir définir $x^{\frac{1}{n}}$ comme étant un (le !) nombre qui élevé à la puissance n, redonne x.
Attention ! Ce nombre n'existe pas toujours. Vous savez bien qu'aucun carré ne peut donner un nombre négatif. On ne peut donc pas définir $x^{\frac{1}{2}}$ si $x < 0$.

Voyons maintenant les définitions.

6.2 Définitions

Définition 6.1 (Racines n-ième). Soit $x \geq 0$ un réel, $n \geq 1$ un entier. On appelle *racine n-ième* de x, le nombre réel, que l'on note $x^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{x}$, tel que

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$$

Remarque 6.1. Nous avons défini la racine n-ième d'un réel positif car nous avons bien vu que cela n'existait pas toujours pour un réel négatif. Mais est-ce que cela existe pour tous les positifs ? La réponse est « oui » (heureusement !) et nous verrons cela dans la section suivante (6.3).

Définition 6.2 (Puissances rationnelles). Soit $x > 0$ un réel et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On définit x à la puissance r comme étant le nombre suivant :
$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Remarque 6.2. Avec de telles définitions, on s'est assuré que les règles de calculs sur les exposants étaient conservées.

Propriété 6.1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Alors
$$x^{r_1+r_2} = x^{r_1}x^{r_2}$$
$$x^{r_1r_2} = (x^{r_1})^{r_2} = (x^{r_2})^{r_1}$$

6.3 Autre vision

Dans la section précédente, nous avons défini la racine n-ième d'un réel positif grâce aux propriétés des puissances entières, mais nous n'étions pas certains que ce soit défini pour tout réel positif. Nous allons donner une autre définition qui permet de s'assurer que c'est valable pour tout réel positif.

Propriété 6.2. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Il suffit de constater que la dérivée (nx^{n-1}) est positive (strictement pour $x \neq 0$), donc f_n est strictement croissante. Donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f_n(\mathbb{R}_+)$. Or $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. □

Cette propriété nous permet alors de définir la fonction racine n-ième.

Définition 6.3 (Racine n-ième). Soit $n \geq 1$ un entier. On définit la fonction *racine n-ième* comme étant la fonction réciproque de la fonction puissance n, sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 6.3. Les deux définitions 6.3 et 6.1 sont bien les mêmes. En effet, dans 6.1, on a défini la racine n-ième comme étant le réel qui élevé à la puissance n redonne x. C'est donc bien la définition de la fonction réciproque de la fonction puissance n.

La fonction puissance entière étant bijective sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, nous sommes assuré que la réciproque (la fonction racine n-ième) est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Nous avons finalement défini la puissance entière et rationnelle d'un réel positif quelconque. Peut-on définir la puissance irrationnelle d'un réel positif ? La réponse est encore une fois « oui ».

La première méthode de définition utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, vous comprenez alors qu'elle n'est pas au programme…

La seconde méthode est de simplement définir, pour $x > 0$ et y quelconque

$$x^y = e^{y\ln(x)}$$

Mais on est en train de prendre de l'avance sur la fin de ce module.

Remarque 6.4. Certains seraient tenté (à raison) de dire : « Oui, mais, la fonction cube (ou $x \mapsto x^n$, pour n impair) est bijective sur $\mathbb{R}$, on peut donc définir la racine cubique pour des nombres négatifs ? » Certes, mais cela veut dire qu'il va falloir regarder tous les cas particuliers et surtout s'assurer que les fractions soient bien réduites, au risque de raconter n'importe quoi.
C'est pour cette raison que nous travaillerons exclusivement sur $\mathbb{R}_+$ et on s'assurera en TD que tout ce qui est sous les symboles $\sqrt[n]{\ }$ soit positif.

6.4 Courbes

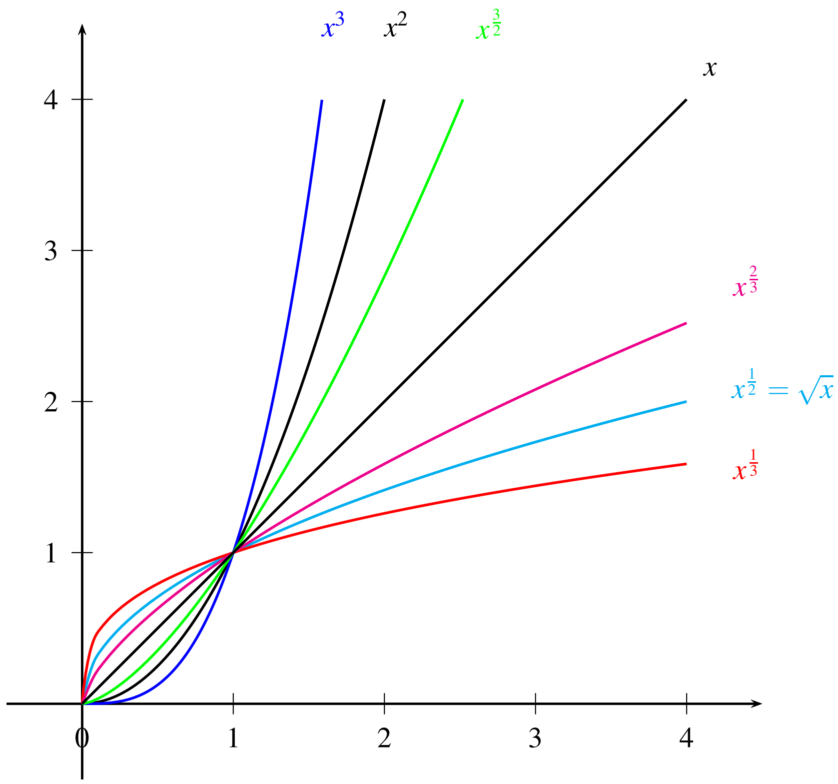


FIGURE 6.1 – Quelques fonctions puissances

Remarque 6.5. Remarquez la symétrie des courbes par rapport à la droite $y = x$.

7 Trigonométrie

Ce chapitre se fera sur deux séances. Nous allons (re-)définir les fonctions cosinus, sinus et tangente, et voir leurs propriétés.

7.1 Cosinus et Sinus

7.1.1 Définition

Les cosinus et sinus vous ont été introduits de manière géométrique au collège : c'est le rapport des longueurs d'un coté sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Nous allons donner une définition à partir du *cercle trigonométrique*.

Définition 7.1 (Cercle trigonométrique). Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. On appelle *cercle trigonométrique* l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $OM = 1$.

Remarque 7.1. Le cercle trigonométrique est donc le cercle de centre O et de rayon 1.
Un point $M(x;y)$ est sur le cercle trigonométrique si et seulement si $x^2+y^2=1$.

Définition 7.2 (Cosinus et Sinus). Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère orthonormé. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M(x;y)$ le point du cercle trigonométrique tel que

$$\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right) = \theta \mod 2\pi$$

où $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ désigne l'angle algébrique entre les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$.

— On appelle *cosinus de* θ, que l'on note $\cos(\theta)$ l'abscisse du point M.

— On appelle *sinus de* θ, que l'on note $\sin(\theta)$ l'ordonnée du point M.

Remarque 7.2.

— Si vous faite un schéma, cette définition est bien cohérente avec celle du collège (voir figure 7.1).

— On remarque, d'après la remarque 7.1, que nécessairement, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$$

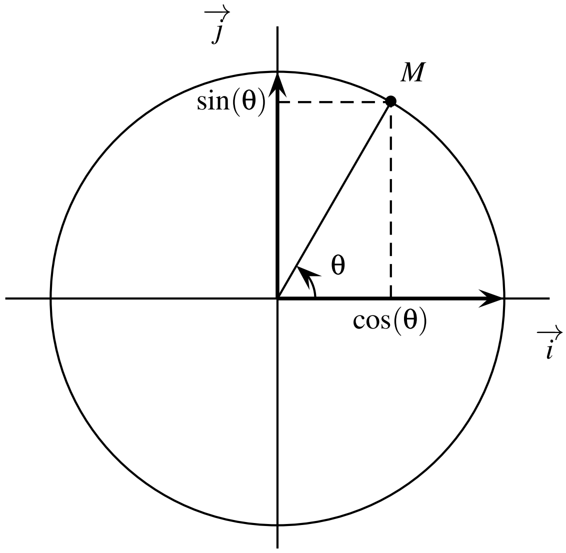


FIGURE 7.1 – Cosinus et Sinus

7.1.2 Angles remarquables

Voici les sinus et cosinus à connaître par cœur.

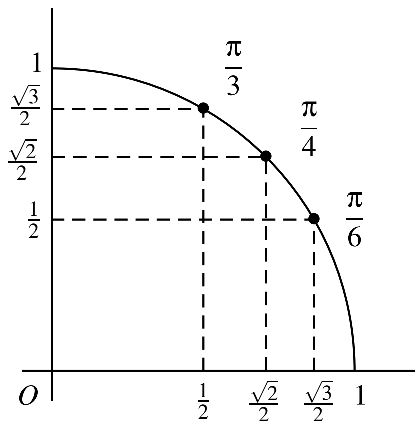


FIGURE 7.2 – Angles remarquables

7.1.3 Symétries

Les symétries (à connaître aussi) , permettent de trouver les sinus et cosinus des angles tels que $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{4}$.

7.2 Tangente

La tangente d'un angle est simplement définie par

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

À partir des valeurs et des formules sur cosinus et sinus, vous pouvez en déduire les valeurs et des formules sur la tangente.
Vous remarquez déjà que pour $\theta = \frac{\pi}{2} \mod \pi$, la tangente n'est pas définie (elle vaut $\pm\infty$).

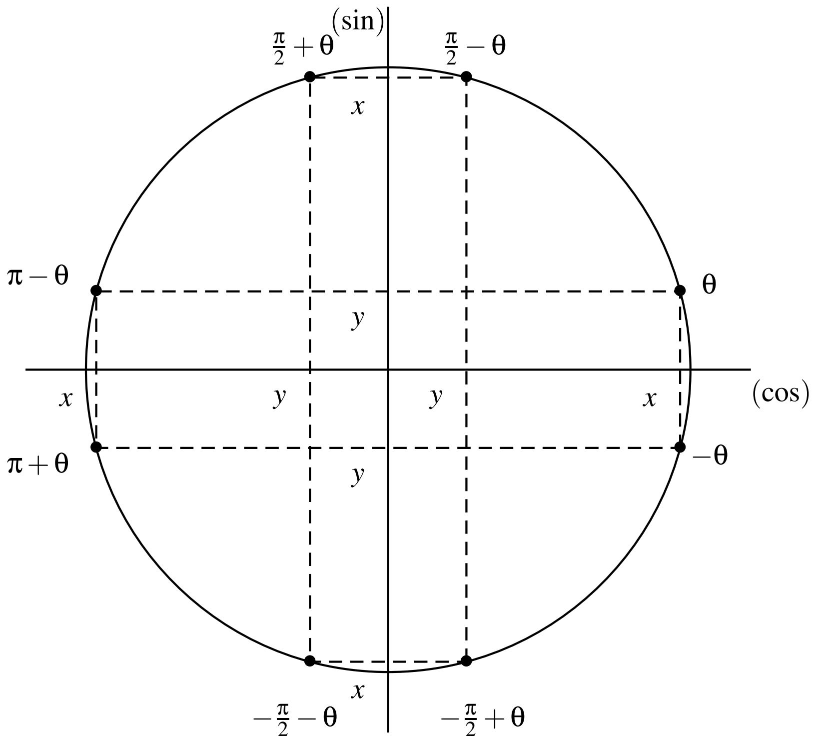


FIGURE 7.3 – Symétries

Comment lire la tangente sur le cercle trigonométrique ? Il faut tracer une droite tangente au cercle trigonométrique, au point d'abscisse 1. La valeur de la tangente se lit alors sur cette droite (voir la figure 7.4).

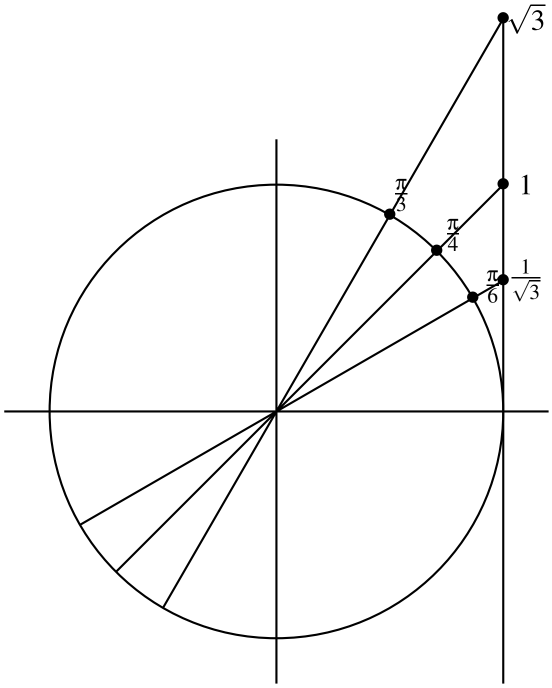


FIGURE 7.4 – Tangente

7.3 Formules

Voici des formules à connaître par cœur et que vous démontrerez plus tard dans le semestre.

Propriété 7.1 (Formulaire de trigonométrie).

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\cos(a) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \qquad \sin(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\tan(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Remarque 7.3. Pour les quatre dernières formules, vous avez juste à retenir la phrase « CoCo, SiSi, SiCo, CoSi », le reste étant facile à placer.

7.4 Courbes

Voici quelques propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques :

- Le cosinus et le sinus sont périodiques de période 2π.
- Le sinus et le cosinus sont compris entre -1 et 1. Ils n'ont pas de limite en $+\infty$.
- La tangente est périodique de période π.
- La tangente tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, et tend vers $-\infty$ aux mêmes points, mais par valeurs supérieures.

Voici les trois courbes :

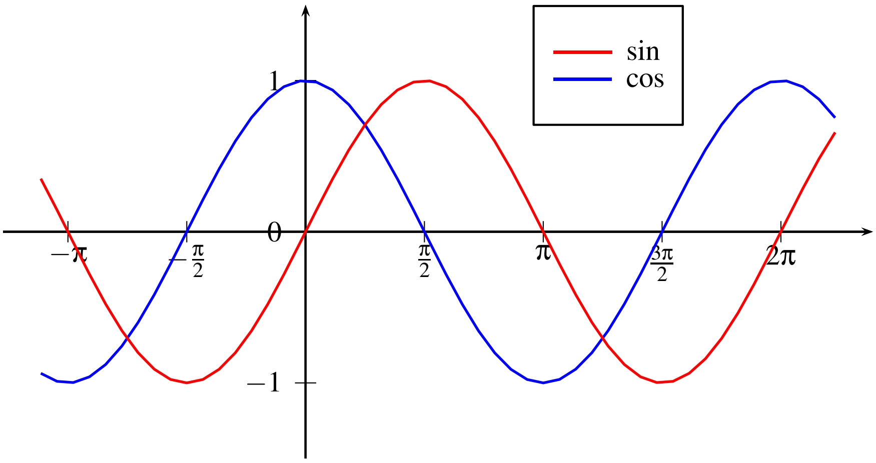


FIGURE 7.5 – Sinus et Cosinus

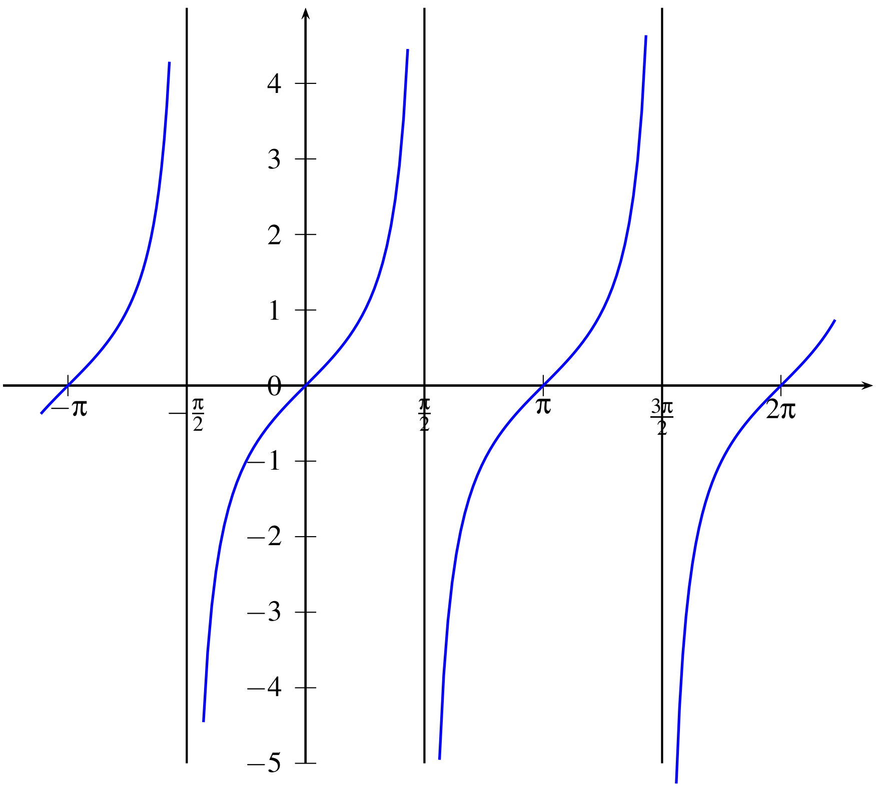


FIGURE 7.6 – Tangente

8 Dérivation

8.1 Nombre dérivé

8.1.1 Définitions

Définition 8.1 (Taux d'accroissement). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On définit le *taux d'accroissement* de la fonction f au point a comme étant la fonction $\tau_{f,a}$ définie par

$$\tau_{f,a} : \left\{ \begin{array}{ccc} I \backslash \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

Définition 8.2 (Nombre dérivé). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* au point a si et seulement si son taux d'accroissement $\tau_{f,a}$ possède une limite finie quand x tend vers a. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f au point a et est notée :

$$f'(a) \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) \quad \text{ou} \quad \dot{f}(a)$$

Remarque 8.1.

— La définition nous dit simplement que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

— Si on pose $h = x - a$, la définition peut se réécrire :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Définition 8.3 (Nombre dérivé à droite/gauche). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est *dérivable à gauche* (resp. *dérivable à droite*) au point a si et seulement si son taux d'accroissement $\tau_{f,a}$ possède une limite finie à gauche (resp. à droite) quand x tend vers a.
On note dans ce cas $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) la dérivée à gauche (resp. à droite) de f en a.

8.1.2 Interprétations

Interprétation géométrique

Le taux d'accroissement $\tau_{f,a}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite (AM) qui est la corde joignant le point fixe $A(a; f(a))$ au point variable $M(x; f(x))$. Dire que « x tend vers a » revient à dire que le point M se rapproche du point A tout en restant sur la courbe. Dire que f est dérivable en a revient alors à dire que les cordes ont une position limite

lorsque M se rapproche de A, qui est une tangente non verticale à la courbe représentative de f.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est donc le coefficient directeur de la tangente en a de la courbe représentative de f et une équation de cette tangente est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

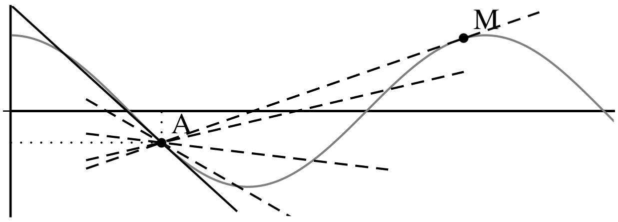


FIGURE 8.1 – Interprétation géométrique.

Remarque 8.2. [Tangente verticale] Lorsque f est définie et continue en a mais que la limite du taux d'accroissement en a est infinie, alors la courbe représentative de f possède une tangente verticale en a d'équation $x = a$.

Interprétation cinématique

Si au lieu d'étudier f, on étudie d, une fonction qui à tout instant t associe la distance $d(t)$ parcourue par un mobile, alors le taux d'accroissement $\tau_{d,t_0}(t) = \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$ est égal à la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t. Lorsque t se rapproche de t_0 (l'intervalle de temps se rapproche de 0) alors la vitesse moyenne se rapproche de la vitesse instantanée à l'instant t_0.
Le nombre dérivé $d'(t_0)$ est donc la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

8.1.3 Propriétés

Propriété 8.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$, différent d'une extrémité de I. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Démonstration. Cela provient de la définition du nombre dérivé et de la propriété similaire sur les limites. □

Remarque 8.3. Lorsqu'une fonction f est dérivable à droite et à gauche en un point a, mais que les deux dérivées sont différentes, alors la courbe représentative de f possède un point anguleux en a. Un exemple classique est la fonction « valeur absolue » qui est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Propriété 8.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel ℓ et une fonction ε définie sur I tels que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall x \in I, \ f(x) = f(a) + (x-a)\ell + (x-a)\varepsilon(x) \qquad (\star)$$

Dans ce cas, nous avons $\ell = f'(a)$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ On suppose que f est dérivable en a et on pose pour tout $x \neq a$, $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ et $\varepsilon(0) = 0$. La fonction ε ainsi définie est bien définie sur I. Puisque f est dérivable en a, son taux d'accroissement tend vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \varepsilon(x) = 0 = \varepsilon(0)$. Donc $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\ell = f'(a)$ nous avons l'égalité cherchée.

$\Leftarrow$ Si une telle fonction existe alors le taux d'accroissement a pour limite $\lim\limits_{x \to a} \tau_{f,a}(x) = \ell + \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Le taux d'accroissement ayant une limite finie, la fonction est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Remarque 8.4.

— L'équation ($\star$) est appelée *Développement limité à l'ordre 1* de f en a.

— Si on reprend le même principe que dans la remarque 8.1, le développement limité se réécrit :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Définition 8.4 (Approximation affine). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La fonction définie sur I par $\tilde{f} : x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$ est appelée *approximation affine* de f en a.

Remarque 8.5. Le nom d'approximation affine se justifie d'abord du fait que $\tilde{f}$ est une fonction affine, puis du fait que l'erreur commise lorsque l'on remplace f par $\tilde{f}$, est égal à $(x-a)\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers a. C'est donc une approximation qui n'est valable que lorsque x est proche de a.

Propriété 8.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration. Si la fonction f est dérivable, alors on peut l'écrire sous la forme ($\star$). Ainsi il devient évident que la limite de f lorsque x tend vers a est $f(a)$. La fonction est donc bien continue. $\square$

Remarque 8.6. [Attention !] La réciproque est fausse. Un contre-exemple classique : la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Propriété 8.4 (Opérations). Soit f et g deux fonctions dérivables en un point a et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

— $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

— λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

— fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g('a)$.

— Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a est $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration. Nous allons uniquement démontrer le dernier point (les autres étant plus faciles). Tout d'abord g étant dérivable en a, elle est continue en a. Puisque $g(a) \neq 0$, il existe un intervalle I sur lequel g ne s'annule jamais. Plaçons-nous sur cet intervalle. Nous cherchons à calculer $\lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} q(x)$.

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} \\
&= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} \\
&= \frac{1}{g(x)g(a)} \times \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc bien la limite cherchée. □

Propriété 8.5 (Composée). Soit f une fonction dérivable en un point a et g une fonction dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Démonstration. Nous allons écrire les développements limités à l'ordre 1 des fonctions f et g :$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ et $g(y) = g(f(a)) + (y - f(a))g'(f(a)) + (y - f(a))\varepsilon_2(y)$.

En prenant $y = f(x)$ nous avons

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(f(x)) \\
&= g(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))g'(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x)) \\
&= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)\Big(\varepsilon_1(x)\big(g'(f(a)) + \varepsilon_2(f(x))\big) + f'(a)\varepsilon_2(f(x))\Big)
\end{aligned}$$

En posant $\varepsilon_3(x) = (x-a)\Big(\varepsilon_1(x)\big(g'(f(a)) + \varepsilon_2(f(x))\big) + f'(a)\varepsilon_2(f(x))\Big)$, nous obtenons bien un développement limité à l'ordre 1 de $g \circ f$ en a. D'où le résultat. □

Propriété 8.6 (Réciproque). Soit f une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$. Si f admet en un point $a \in I$ une dérivée non nulle, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration. Nous savons $f \circ f^{-1} = Id$. Or pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{Id(x) - Id(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$. Donc la dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1. Ainsi $\left(f \circ f^{-1}\right)' = Id' = 1$. Or d'après la propriété 8.4, $\left(f \circ f^{-1}\right)' = (f^{-1})' \times f'(f^{-1})$. Si on se place en $x = b$, on obtient l'égalité : $(f^{-1})'(b) \times f'(f^{-1}(b)) = 1$. Or $f'(f^{-1}(b)) = f'(a) \neq 0$. D'où l'égalité cherchée. □

8.2 Dérivée

8.2.1 Définition

Définition 8.5 (Fonction dérivée). Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en chacun des points de I, on dit que f *est dérivable sur* I. On note alors f' la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{y \to x} \tau_{f,x}(y)$. La fonction f' est appelée *dérivée de* f.

8.2.2 Propriétés

Propriété 8.7 (Fonction dérivée). Les propriétés 8.4 et 8.5 restent valables pour les fonctions dérivées.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les propriétés citées en chacun des points de I. □

Propriété 8.8 (Réciproque bis). Soit f une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$ telle que sa dérivée ne s'annule pas sur I. Alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration. On applique la propriété 8.6 en chacun des points de I. □

8.3 Dérivées des fonctions usuelles

La table de dérivées suivantes (table 8.1) est à connaître par cœur. Dans cette table u désigne une fonction dérivable, n un réel non nul, ainsi, contrairement aux apparences, cette table vous donne toutes les dérivées que vous connaissez.

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\tan(u)$	$u'(1+\tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

TABLE 8.1 – Table des dérivées usuelles

9 Logarithmes et Exponentielles

Ce chapitre se fera sur deux séances. Nous y verrons les fonctions logarithme et exponentielle.

9.1 Fonctions logarithmes

9.1.1 Définitions

Plusieurs définitions sont possibles pour la fonction logarithme. Cela dépend si l'on a déjà vu la fonction exponentielle, ou si on sait ce qu'est une primitive. Puisque vous connaissez ces deux notions, nous allons donner les deux définitions en même temps. Avant cela, nous allons donner une troisième définition qui est plus « historique ».

Pour cela voyons comment et pourquoi les fonctions logarithmes sont apparues. C'est au début de XVII[e] siècle, alors que les astronomes (et autres scientifiques de l'époque) devaient effectuer de lourds calculs de produit avec des grands nombres, que Jonh Napier (scientifique écossais, dont le nom francisé est Neper) eu l'idée saugrenue (pas tant que cela en fait, voir [3]) de transformer les multiplications en additions et les grands nombres en petits nombres. Ainsi, pour multiplier entre eux deux grands nombres A et B, il suffisait de lire dans une table leurs petits nombres associés a et b, de faire l'addition $c = a+b$, puis de lire dans la même table, le grand nombre C associé à c. De manière plus formelle, si on pose $a = f(A)$, $b = f(B)$ et $c = f(C)$, on a la relation

$$f(A)+f(B) = a+b = c = f(C) = f(AB)$$

D'où la définition suivante :

Définition 9.1 (Fonction Logarithme (définition historique)). Nous appelons *Logarithme népérien* l'unique fonction (notée ln) définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f'(1) = 1$ et pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(xy) = f(x)+f(y)$$

Remarque 9.1. Nous allons admettre qu'il existe bien une unique fonction qui vérifie ces conditions.
Imposer $f'(1) = 1$ n'est que pour permettre l'unicité et de définir le logarithme népérien. On peut montrer que l'ensemble des fonctions dérivables vérifiant $f(xy) = f(x)+f(y)$ est l'ensemble des fonctions logarithmes (de base quelconque).

Maintenant que vous avez cette vision historique du logarithme, j'espère que vous ne confondrez plus les formules du logarithme et de l'exponentielle…

Définition 9.2 (Fonction Logarithme (Primitive)). Nous appelons *logarithme népérien* l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Exercice 9.1. Montrons que les deux définitions précédentes nous donnent bien la même fonction !

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ telle que $f'(1) = 1$ et pour tous x, y, $f(xy) = f(x)+f(y)$. Montrer que f est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

2. Soit f la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Montrer que que $f'(1) = 1$ et que pour tout x, y, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

1. Tout d'abord, remarquons qu'en prenant $y = 1$, nous avons que pour tout $x > 0$, $f(x) = f(x) + f(1)$. Donc nécessairement $f(1) = 0$.
Ensuite, pour $x > 0$, fixé, on pose φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi_x(y) = f(xy) - f(x) - f(y)$. La fonction φ_x est constamment nulle, par définition de f, et est dérivable (car f l'est). Sa dérivée est donnée par
$$\varphi_x'(y) = xf'(xy) - f'(y)$$
Mais puisque φ_x est constante, sa dérivée est nulle, donc pour tout y, $xf'(xy) = f'(y)$.
Finalement, pour tout $x > 0$, $y > 0$, nous avons
$$f'(xy) = \frac{f'(y)}{x}$$
En prenant alors $y = 1$ et du fait que nous avons imposé $f'(1) = 1$, on a bien que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2. Tout d'abord, puisque f est une primitive de $\frac{1}{x}$, nous avons $f'(x) = \frac{1}{x}$, donc $f'(1) = 1$.
Ensuite, soit $y > 0$, posons ψ_y la fonction définie par $\psi_y(x) = f(xy) - f(x) - f(y)$. Notre objectif est donc de montrer que ψ_y est la fonction nulle. Cette fonction est dérivable et
$$\psi_y'(x) = yf'(xy) - f'(x) = y\frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = 0$$
Ainsi, ψ_y est une fonction constante. Donc, pour tout $x > 0$,
$$\psi_y(x) = \psi_y(1) = f(y) - f(1) - f(y) = -f(1) = 0$$
Car on a imposé $f(1) = 0$. Ainsi, la fonction ψ_y est nulle (pour tout $y > 0$) et nous avons bien l'égalité voulue pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$.

Définition 9.3 (Fonction Logarithme (Exponentielle)). Nous appelons *logarithme népérien* la fonction réciproque de la fonction exponentielle

Remarque 9.2. On pourrait très certainement montrer que cette définition est équivalente aux deux précédentes. Mais nous ne le ferons pas (nous n'avons pas encore vu l'exponentielle...)

Dans les définitions précédentes, nous avons ajouté quelques contraintes afin d'obtenir le logarithme népérien. Sans ces contraintes, nous aurions pu définir les fonction logarithme en général. Nous allons simplement les définir ainsi :

Définition 9.4 (Logarithme de base a). Soit $a > 0$ un réel. On appelle *Logarithme de base a* la fonction, notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarque 9.3. Toutes les fonctions logarithmes s'annulent en 1 et vérifient $f(ab) = f(a) + f(b)$.

La dérivée de $\ln_a$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(a)}$.

Mis à part le logarithme népérien, les deux fonctions logarithmes dignes d'intérêt sont les logarithme de base 2 et de base 10. En effet, le logarithme de base 2 sera très utile en informatique où les calculs se font en binaire (en base 2). Cela permet notamment de connaitre le nombre de bits nécessaires pour représenter un entier. De même le logarithme en base 10 est utile du fait que l'on a l'habitude de compter en base décimale (10). Ainsi, cela permet de connaitre le nombre de chiffres nécessaires pour écrire un nombre (en base 10).

9.1.2 Courbes représentatives

Voici les courbes représentatives des fonctions logarithmes de bases $\frac{1}{10} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < e < 10$

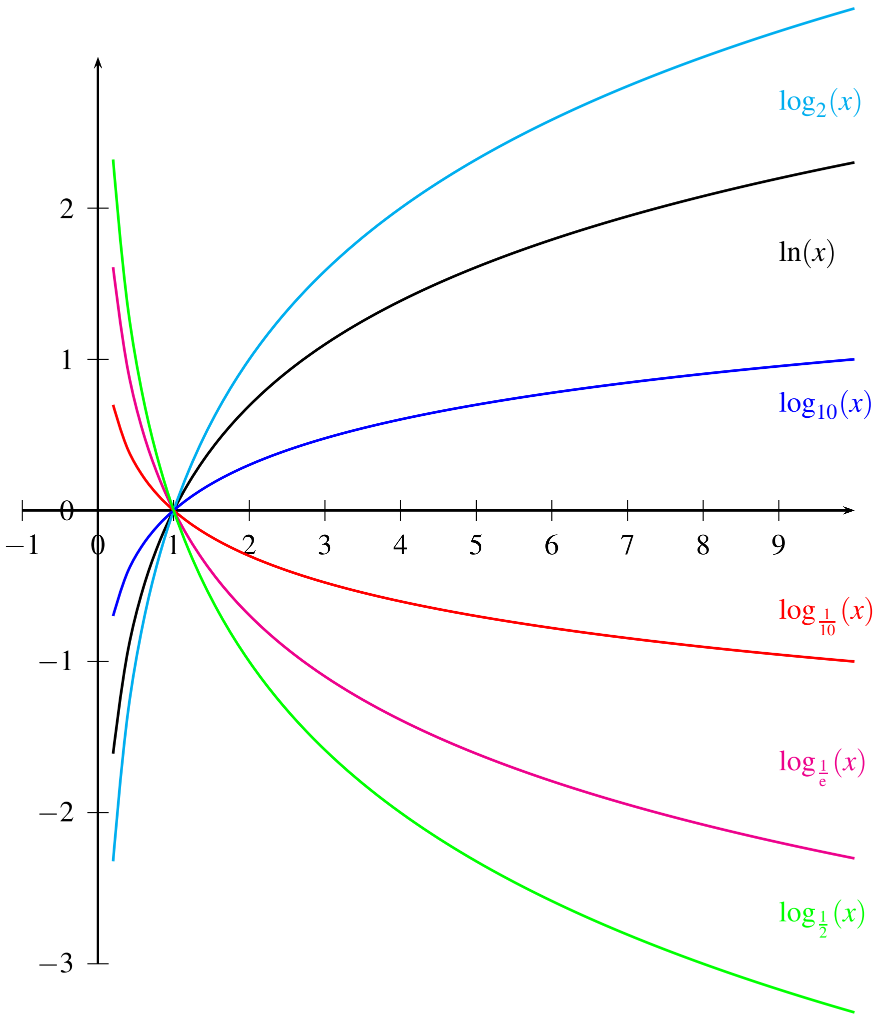


FIGURE 9.1 – Logarithmes

9.2 Fonctions exponentielles

9.2.1 Définitions

Là encore, nous pouvons voir plusieurs définitions de la fonction exponentielle.

Définition 9.5 (Fonction exponentielle (fonctionnelle)). Nous appelons *exponentielle* l'unique fonction (notée $x \mapsto e^x$) définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et pour tous réels x, y ;

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Remarque 9.4. Cette fois on transforme les sommes en produit. C'est donc bien une sorte de réciproque à la fonction logarithme (voir définition 9.7).

Définition 9.6 (Exponentielle (Dérivée)). Nous appelons *Exponentielle* l'unique solution de l'équation différentielle

$$f'(x) = f(x)$$

Avec $f(0) = 1$

Exercice 9.2. Montrer que toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et pour tous réels x, y $f(x+y) = f(x) + f(y)$, vérifie $f(0) = 1$ et pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi_x(y) = f(x+y) - f(x)f(y)$. Cette fonction est nulle et dérivable, de dérivée

$$\varphi_x'(y) = 0 = f'(x+y) - f(x)f'(y)$$

En prenant $y = 0$, on obtient bien

$$f'(x) = f(x)$$

Ainsi, $f(0) = f'(0) = 1$.

Remarque 9.5. La réciproque n'est pas encore à notre portée.

Définition 9.7 (Exponentielle (Logarithme)). Nous appelons *exponentielle* la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Nous allons donner une quatrième définition de l'exponentielle. Elle utilise la notion de série que vous ne connaissez pas encore. Mais cette définition peut être très utile pour le reste de vos études, il est donc bon de l'avoir en tête très tôt.

Définition 9.8 (Exponentielle (Série)). On appelle *exponentielle* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque 9.6. Cette définition permet de définir l'exponentielle de tout objet mathématique dont on sait calculer les puissances entières (et additionner).
On peut alors définir l'exponentielle d'un nombre complexe, puis, à partir de là, définir le cosinus et le sinus d'un réel, ce qui permet alors de démontrer des formules sur le cosinus et le sinus que l'on ne peut pas démontrer avec les définitions que l'on a vues précédemment (mais je commence à largement sortir du programme...).
On peut aussi définir l'exponentiel d'une matrice ! (vous verrez cela en deuxième année).

Tout comme pour le logarithme, il existe des exponentielles de bases différentes. Nous allons en donner une unique définition qui vous sera très utile rapidement.

Définition 9.9 (Exponentielle de base a). Soit $a > 0$ un réel différent de 1. On appelle *exponentielle de base a* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$$

Remarque 9.7. Attention à ne pas confondre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances. Les premières ont une base fixe et un exposant qui varie, alors que les secondes ont une base qui varie et un exposant fixe.

Cependant, si je prends un réel, par exemple $1.2^{3.7}$, il peut être vu comme étant 1.2 à la puissance 3.7 (donc fonction puissance 3.7 appliquée à 1.2), ou comme 1.2 exposant 3.7 (fonction exponentielle de base 1.2 appliquée à 3.7). Dans les deux cas, cela vaut $\mathrm{e}^{3.7 \ln(1.2)}$.

9.2.2 Courbes représentatives

Voici les courbes représentatives des fonctions exponentielles de bases $\frac{1}{10} < \frac{1}{\mathrm{e}} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < \mathrm{e} < 10$ (figure 9.2).

Remarque 9.8. Vous remarquerez aisément que toutes ces courbes sont les symétriques des courbes de la figure 9.1, par rapport à la droite $y = x$.

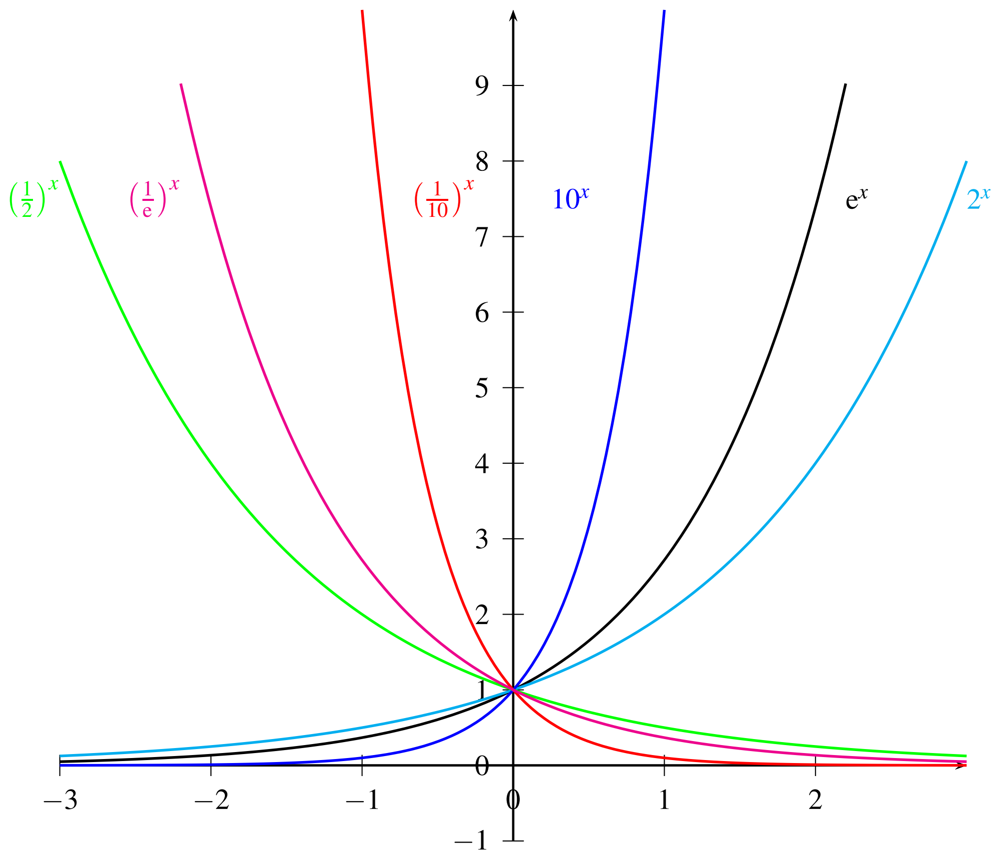


FIGURE 9.2 – Exponentielles

10 Intégration

Ce chapitre se fera sur trois séances.

10.1 Intégration sur un segment

10.1.1 Intégration d'une fonction continue et positive sur un segment

Les intégrales vous ont été introduites au lycée comme étant « l'aire (algébrique) sous la courbe ». Nous n'avons pas le temps, en une seule séance, de voir la « vraie » définition d'une intégrale (qui se fait à l'aide de fonctions en escalier). Nous allons donc rester avec la définition du lycée.

Définition 10.1 (Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment). Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$. On appelle *intégrale* de f sur le segment $[a;b]$, le réel égale à l'aire (en unité d'aire) entre la courbe représentative de f dans un repère cartésien et l'axe des abscisses. On note cette intégrale

$$\int_{[a;b]} f$$

Propriété 10.1 (Linéarité de l'intégrale). Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues et positives sur le segment $[a;b]$ et λ, μ deux réels positifs. Alors

$$\int_{[a;b]} (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \int_{[a;b]} f_1 + \mu \int_{[a;b]} f_2$$

Démonstration. Puisque f_1 et f_2 sont continues et positives, et λ, μ, positifs, alors $\lambda f_1 + \mu f_2$ est continue et positive. On se convainc alors assez facilement que l'aire sous la courbe représentative de $\lambda f_1 + \mu f_2$ est égale à λ fois l'aire sous f_1 plus μ fois l'aire sous f_2. □

Propriété 10.2 (Croissance de l'intégrale). Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a;b]$. Alors $\int_{[a;b]} f \geq 0$.

Démonstration. Évident : l'aire sous la courbe est positive. □

Corollaire 10.1. Soit f et g deux fonctions continues et positives sur le segment $[a;b]$. Si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors

$$\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$$

Démonstration. Il suffit de considérer l'intégrale de la fonction $f - g > 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ et d'appliquer la propriété 10.2. □

Propriété 10.3 (Relation de Chasles). Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;c]$ et $b \in [a;c]$. Alors

$$\int_{[a;c]} f = \int_{[a;b]} f + \int_{[b;c]} f$$

Démonstration. Là encore, on se convainc facilement que les aires s'additionnent. □

10.1.2 Intégration d'une fonction continue (de signe quelconque) sur un segment

Cette section est simplement une redite de la précédente, mais avec des fonctions de signe quelconque.

Définition 10.2 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment). Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$. On appelle *intégrale* de f sur le segment $[a;b]$, le réel égale à l'aire algébrique (en unité d'aire) entre la courbe représentative de f dans un repère cartésien et l'axe des abscisses. L'aire algébrique signifie que l'on compte positivement les portions où f est positive (courbe au dessus de l'axe des abscisses) et négativement les portions où f est négative (courbe en dessous de l'axe des abscisses). On note cette intégrale

$$\int_{[a;b]} f$$

Remarque 10.1. Il n'y a pas de raison de changer de notation, puisque cette seconde définition intègre la première.

Propriété 10.4 (Linéarité de l'intégrale). Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues sur le segment $[a;b]$ et λ, μ deux réels. Alors

$$\int_{[a;b]} (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \int_{[a;b]} f_1 + \mu \int_{[a;b]} f_2$$

Démonstration. Là encore en considérant les aires, on peut se convaincre que la propriété est vraie. □

Propriété 10.5. Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a;b]$. Si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors

$$\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$$

Démonstration. Il suffit de considérer l'intégrale de la fonction $f - g > 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ et d'appliquer la propriété 10.2. □

Remarque 10.2. Vous remarquerez que la propriété 10.2 n'est valable que pour des fonctions positives. Cette propriété n'est donc pas redonnée dans cette section.

Propriété 10.6 (Relation de Chasles). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;c]$ et $b \in [a\,;c]$. Alors

$$\int_{[a;c]} f = \int_{[a;b]} f + \int_{[b;c]} f$$

Démonstration. Là encore, on se convainc facilement que les aires s'additionnent. □

Propriété 10.7 (Inégalité triangulaire). Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Alors

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq \int_{[a;b]} |f|$$

Démonstration. Il suffit de constater que $-f$ et $|f|$ sont continues sur $[a\,;b]$. Par définition de la valeur absolue, nous avons $-|f| \leq f \leq |f|$. Ainsi, par croissance de l'intégrale (propriété 10.5), nous avons $-\int_{[a;b]} |f| \leq \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f|$. On en déduit donc que $\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f|$ et $-\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f|$, d'où $\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq \int_{[a;b]} |f|$. □

10.2 Intégrale d'une fonction continue et primitive

10.2.1 Intégrale d'une fonction continue

Attention, lorsque l'on parle de segment $[a\,;b]$, cela sous-entend que $a < b$. Or vous avez l'habitude de calculer des intégrales avec $a \geq b$. Comment fait-on ?

Définition 10.3 (Intégrale d'une fonction continue). Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b de I, on appelle *intégrale de a à b* le nombre réel

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle\int_{[a;b]} f & \text{si } a < b \\ \displaystyle -\int_{[b;a]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

Remarque 10.3.

— On remarque que $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

— Si $b < a$ alors la croissance de l'intégrale n'est plus vérifiée. Au contraire, l'intégrale est décroissante.

— De même, l'inégalité triangulaire ne reste valable qu'à condition que $a < b$.

— Par contre la relation de Chasles reste toujours valable. Nous allons donc l'énoncer à nouveau.

Propriété 10.8 (Relation de Chasles). Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors pour tous réels a, b et c de I, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Propriété 10.9. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ et de signe constant. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Évident : la fonction f est nulle, donc l'aire sous la courbe est nulle.

$\Rightarrow$ Supposons que f soit positive sur le segment. Nous allons montrer l'implication par contraposée (vous verrez plus tard ce type de raisonnement), c'est à dire que l'on va supposer que f est non nulle et montrer que l'intégrale est non nulle.
Puisque f est non nulle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) \neq 0$. Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]c-\delta;c+\delta[$, $|f(x) - f(c)| \leq \frac{f(c)}{2}$. L'inégalité implique que $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$.
On note alors φ la fonction (en escalier) égale à $\frac{f(c)}{2}$ sur $]c-\delta;c+\delta[$ et nulle ailleurs. On a clairement $\varphi \leq f$, d'où, par croissance de l'intégrale f, $\int_{[a;b]} \varphi = \delta f(c) \leq \int_{[a;b]} f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Ainsi l'intégrale est non nulle.

Définition 10.4. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a;b]$. On appelle *valeur moyenne* de f le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a;b]} f$$

Théorème 10.1 (Théorème de la moyenne). Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$$

Démonstration. La fonction f étant continue sur un segment, elle y est bornée et atteint ses bornes. Soit m et M les minimum et maximum de f sur $[a;b]$. Posons φ la fonction constante égale à m sur $[a;b]$ et ψ la fonction constante égale à M sur ce même intervalle. On a alors φ et ψ qui sont des fonctions en escalier telles que $\varphi \leq f \leq \psi$. D'où, par définition de l'intégrale de f, $m(b-a) = \int_{[a;b]} \varphi \leq \int_a^b (t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{[a;b]} \psi = M(b-a)$. En divisant l'inégalité par $b-a \neq 0$ et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue) on en déduit l'existence de $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. □

Remarque 10.4.

— La valeur moyenne d'une fonction continue, définie précédemment, est la valeur que doit prendre une fonction constante sur $[a;b]$ pour avoir la même intégrale. D'où le nom !

— On appelle *valeur efficace d'une fonction f T-périodique* le nombre f_{eff} défini par $f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$. Si la fonction est sinusoïdale, on démontre que $f_{eff} = \frac{f_{max}}{\sqrt{2}}$, si f est triangulaire, $f_{eff} = \frac{f_{max}}{\sqrt{3}}$.

10.2.2 Primitive

Définition 10.5 (Primitive). Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f sur l'intervalle I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété 10.10. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $F_2(x) - F_1(x) = k$.

Démonstration. On veut montrer que la fonction $F_2 - F_1$ est constante, c'est à dire que pour tout réel a, b de I, $(F_2 - F_1)(a) = (F_2 - F_1)(b)$.

Soit a et b deux réels de I. La fonction $(F_2 - F_1)$ étant dérivable sur I, elle est continue sur I, donc sur $[a;b]$. Elle est aussi dérivable sur $]a;b[$. Donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$(F_2 - F_1)(b) - (F_2 - F_1)(a) = (b-a)(F_2 - F_1)'(c)$$

Or $(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0$. Donc $(F_2 - F_1)(b) = (F_2 - F_1)(a)$. □

Théorème 10.2 (Théorème fondamental de l'analyse). Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Nous devons d'abord montrer que F est une primitive de f. Pour cela il faut montrer qu'elle est dérivable et que sa dérivée est f. Il faut donc montrer que pour tout $x_0 \in I$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Or d'après la relation de Chasles, $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f étant continue sur $[x_0;x]$ (ou $[x;x_0]$), nous pouvons appliquer le théorème de la moyenne (théorème 10.1) et en déduire que pour tout x, il existe $c(x) \in]x_0;x[$ (ou $]x;x_0[$) tel que $f(c(x)) = \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$. Puisque $c(x)$ est compris entre x et x_0, on en déduit que $\lim\limits_{x \to x_0} c(x) = x_0$. De plus f est continue, donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(c(x)) = f(x_0)$. Le nombre dérivée de F en x_0 est donc bien $f(x_0)$, et ce quelque soit x_0. Donc la dérivée de F est f.

La fonction F est donc bien une primitive de f et elle s'annule en a. L'unicité vient du fait que deux primitives diffèrent d'une constante. Donc si une primitive s'annule en a, elle est forcément égale à F sur I. □

Corollaire 10.2. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Définition 10.6 (Classe $\mathscr{C}^1$). Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *de classe* $\mathscr{C}^1$ si et seulement si f est dérivable sur I et sa dérivée est continue que I.

Propriété 10.11. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I. Alors :

1. Si la fonction h est une primitive de f sur I alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [h(t)]_{t=a}^{t=b} = h(b) - h(a)$.
2. Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration.

1. La fonction $F : x \mapsto h(x) - h(a)$ est une primitive de f qui s'annule en a. Il suffit alors d'appliquer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I alors f' est continue sur I et admet f comme primitive. On utilise donc le résultat précédent.

Remarque 10.5. On peut remarquer que pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous venons de voir la théorie sur l'intégration. Passons maintenant à la pratique : quelles sont les différentes méthodes permettant de calculer une intégrale ?

10.3 Méthodes d'intégration

Nous allons voir plusieurs méthodes d'intégration. Vous en verrez d'autres au cours de cette année.

10.3.1 Intégration directe

La méthode directe consiste à reconnaître la dérivée d'une fonction. Pour cela il faut bien connaître ses tableaux de dérivées (ou de primitives) usuelles. Pour rappel voir la table 10.1 (non exhaustive et contenant des fonctions que vous ne connaissez pas encore, mais que vous rencontrerez très vite).

f	F	v	V
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
e^x	e^x	$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$u'\ln(u)$	$u\ln(u)-u$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$u'\tan(u)$	$-\ln(\lvert\cos(u)\rvert)$
$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$u'\left(1+\tan^2(u)\right)=\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(u)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arccos}(x)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arccos}(u)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}(u)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$u'\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{sh}(u)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$u'\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u)$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\lvert\mathrm{ch}(x)\rvert)$	$u'\mathrm{th}(u)$	$\ln(\lvert\mathrm{ch}(u)\rvert)$
$1-\mathrm{th}^2(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{th}(x)$	$u'\left(1-\mathrm{th}^2(u)\right)=\frac{u'}{\mathrm{ch}^2(u)}$	$\mathrm{th}(u)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{Argsh}(x)$	$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\mathrm{Argsh}(u)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Argch}(x)$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\mathrm{Argch}(u)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{Argth}(x)$	$\frac{u'}{1-u^2}$	$\mathrm{Argth}(u)$

TABLE 10.1 – Tableau des primitives usuelles

Remarque 10.6.

— Les trois premières lignes sont en réalité les mêmes, il suffit donc de ne retenir que la première pour connaître les trois.

— Remarquez que la deuxième et la quatrième colonne sont identiques (il suffit de remplacer x par u). La troisième est comme la première, mis à part le u' qui est toujours en facteur. Finalement, il suffit d'apprendre les deux premières colonnes pour être capable de retrouver tout le tableau (à condition de ne pas oublier le u' !)

Exemple 10.1. Une primitive de $\frac{2x+3}{1+(x^2+3x+4)^2}$ est $\mathrm{Arctan}(x^2+3x+4)$.

10.3.2 Intégration par partie

Propriété 10.12 (Intégration par partie). Soit u et v deux fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction uv est aussi de classe $\mathscr{C}^1$. Donc d'après la propriété 10.11,

$$\begin{aligned} u(b)v(b) - u(a)v(a) = (uv)(b) - (uv)(a) &= \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (u'v)(t) + (uv')(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (u'v)(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b (uv')(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Exemple 10.2. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$. Ainsi, $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$. Les fonctions u et v étant $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer la propriété 10.12.

$$\begin{aligned} I &= [-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ I &= -0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ I &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ I &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Exemple 10.3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u(t) = t^n$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. Ainsi $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$. Les fonctions u et v étant $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, nous pouvons appliquer la propriété.

$$J_n = \left[t^n\mathrm{e}^t\right]_0^1 - n\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - nJ_{n-1}$$

On en déduit une relation de récurrence entre les suites d'intégrales :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \mathrm{e} - nJ_{n-1}$$

Or $J_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$. D'où $J_1 = 1$, $J_2 = \mathrm{e} - 2$, $J_3 = -2\mathrm{e} + 6, \ldots$ On peut montrer par récurrence que $J_n = u_n\mathrm{e} + (-1)^n n!$ avec (u_n) la suite définie par récurrence : $u_{n+1} = 1 - nu_n$ et $u_1 = 1$.

Remarque 10.7. [Méthode] Le choix des fonctions u et v' est crucial. Laquelle intégrer et laquelle dériver ? Le bon sens permet toujours de répondre à cette question, évitant ainsi de tourner en rond. Il semble par exemple évident que l'on va intégrer les fonctions faciles à intégrer telle que l'exponentielle. Les polynômes devront de préférence être dérivés afin de faire baisser le degré global de la fonction, mais ils restent des fonctions faciles à intégrer.

Si vous avez peur de ne pas avoir assez de bon sens, il existe une méthode appelée

ALPES

On dérive dans l'ordre de priorité (donc u est en priorité) :

A les fonctions Arcsin, Arccos, Arctan, Argsh, Argch, Argth

L les fonctions Logarithmiques

P les Polynômes et les fraction rationnelles

E les fonctions Exponentielles

S les fonctions trigonométriques : sin, cos, tan, sh, ch, th

10.4 Pour aller plus loin

Tout ce qui suit est en dehors du programme de lycée et est donc donné à titre indicatif, car vous l'étudierez de toutes façons cette année.

10.4.1 Changement de variable

Propriété 10.13 (Changement de variable). Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $\varphi : [a;b] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a;b]$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration. Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F sur I et pour tout x_0 et x_1 appartenant à I, on a $\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_1) - F(x_0)$. En particulier, comme $\varphi(a) \in I$ et $\varphi(b) \in I$, on a $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. De plus, $F \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle. En appliquant la propriété 10.11 nous avons :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b (F\circ\varphi)'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b \varphi'(u)F'(\varphi(u))\,\mathrm{d}u = \int_a^b \varphi'(u)f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u$$

D'où le résultat. □

Remarque 10.8. [En pratique] Ce qu'il faut retenir pour calculer $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ est que l'on procède ainsi :

1. On définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a;b]$ tel que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$
2. On pose $t = \varphi(u)$, d'où $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$
3. On écrit alors $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$

Exemple 10.4. Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction sin est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et est telle que $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
On pose $t = \sin(u)$ d'où $\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,\mathrm{d}u$$
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(car cos est positif sur cet intervalle)}$$
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u$$
$$I = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$I = \frac{\pi}{4}$$

Remarque 10.9. [Changement de variable bijectif] Le plus souvent, la fonction φ est bijective. Dans ce cas le changement de variable peut s'écrire plus simplement. On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \varphi'(u) f(\varphi(u))\,du$$

Dans la pratique on pose alors $u = \varphi^{-1}(t)$. Dans les calculs cela ne change pas grand chose puisque l'on a $t = \varphi(u)$, mais il est souvent plus naturel d'écrire u en fonction de t plutôt que l'inverse.

10.4.2 Intégration de fonctions circulaires

Dans cette partie on s'intéresse aux primitives de fonctions polynomiales ou rationnelles en cosinus et sinus, c'est-à-dire des fonctions de la forme $f(x) = F(\sin(x);\cos(x))$ où F est un polynôme ou une fraction rationnelle.

F est un polynôme

Par linéarité de l'intégrale, on est ramené au calcul de primitives de la forme

$$I_{n,m} = \int \cos^n(x)\sin^m(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{où } n \text{ et } m \text{ sont des entiers naturels}$$

m ou n est impair

- $n = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1,m} = \int \left(1-\sin^2(x)\right)^p \sin^m(x)(\cos(x))\,\mathrm{d}x$.
  Le changement de variable $t = \sin(x)$ ramène au calcul de $\int \left(1-t^2\right)^p t^m\,\mathrm{d}t$.
- $m = 2q+1$, avec $q \in \mathbb{N}$: $I_{n,2q+1} = \int \cos^n(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^q(\sin(x))\,\mathrm{d}x$.
  Le changement de variable $t = \cos(x)$ ramène à $-\int t^n\left(1-t^2\right)^q\,\mathrm{d}t$.

Dans les deux cas, il s'agit de primitive d'une fonction polynôme.

Exemple 10.5. Calculer $\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$
$\sin^5(x)\,\mathrm{d}x = (1-\cos^2(x))^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$ donne avec le changement de variable défini par $t = \cos(x)$, $\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = -\int(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t = -\int(t^4-2t^2+1)\,\mathrm{d}t$.
Il vient alors : $\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$

m et n sont pairs $n = 2p$ et $m = 2q$, avec p et q entiers naturels. On linéarise $\cos^{2p}(x)\sin^{2q}(x)$.
Si p et q sont trop grands pour que la linéarisation soit aisée, on se ramène au calcul de $\int \cos^{2(p+q)}(x)\,\mathrm{d}x$ ou de $\int \sin^{2(p+q)}(x)\,\mathrm{d}x$. Cette expression provient d'une intégration par partie que nous ne détaillerons pas.

F est une fraction rationnelle

Propriété 10.14 (Règles de Bioche). Les règles de Bioches sont un ensemble de règles permettant de ramener le calcul de la primitive à celui d'une primitive de fonction rationnelle.

Règle 1 : On étudie si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $-x$ ou par $\pi - x$ ou par $\pi + x$.

1. Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $-x$, le changement de variable défini par $x = \mathrm{Arccos}(t)$, donc $t = \cos(x)$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.
2. Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $\pi - x$, le changement de variable défini par $x = \mathrm{Arcsin}(t)$, donc $t = \sin(x)$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.
3. Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $\pi + x$, le changement de variable défini par $x = \mathrm{Arctan}(t)$, donc $t = \tan(x)$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.

Règle 2 : Si deux au moins des changements de variables de la Règle 1 laissent invariant $f(x)\,\mathrm{d}x$, le changement de variable $x = \frac{1}{2}\mathrm{Arccos}(t)$, c'est-à-dire $t = \cos(2x)$ ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.

Règle 3 : Dans tous les cas, le changement de variable $x = 2\mathrm{Arctan}(t)$, c'est-à-dire $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t. Dans ce cas, il faut connaître par cœur les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\tan(x) &= \frac{2t}{1-t^2} \\
\mathrm{d}x &= \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 10.10. Pour avoir les calculs les plus simples possibles, il faut utiliser ces règles dans l'ordre 2, puis 1, puis 3.

Bibliographie

[1] Patrick BERGEON. http://patrick.bergeon.perso.neuf.fr/Sup_TSI/Cours.htm. Cours de TSI (accessible au 01/06/2015).

[2] Christophe BERTAULT. http://christophebertault.fr/cours-et-exercices/. Cours de MPSI (accessible au 01/07/2019).

[3] Jérôme CAMIRÉ-BERNIER et Bernard R. HODGSON. https://accromath.uqam.ca/2019/10/emergence-logarithmique-la-mirifique-invention-de-napier/. Site accromath canadien (accessible au 06/05/2022).

[4] Lycée CORBUSIER. http://www.prepa-corbusier.fr. Cours de TSI (accessible au 01/06/2015).

[5] Denis FELDMANN. http://denisfeldmann.fr/maths.htm. Site sur les mathématiques dans le supérieur (accessible au 01/06/2015).

[6] Daniel GUININ, François AUBONNET et Bernard JOPPIN. *Algèbre 1*. Précis de Mathématiques - Cours, Exercices résolus 1. Breal, 1994.

[7] Daniel GUININ, François AUBONNET et Bernard JOPPIN. *Analyse 1*. Précis de Mathématiques - Cours, Exercices résolus 3. Breal, 1994.

[8] INCONNU. https://www.annales2maths.com/. Site d'annales de brevet et Bac (accessible au 10/05/2022).

[9] INCONNU. https://www.panamaths.net/. (accessible au 20/05/2022).

[10] Éric LEHMAN. *2. analyse*. Mathématiques pour l'étudiant de première année. Belin, 1986.

[11] Paul MILAN. https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/math_pour_aller_plus_l cours_pour_aller_plus_loin/01_cours_les_coniques_termC.pdf. Site Lycée d'adultes (accessible au 21/04/2022).

[12] Emmanuel MORRAND. http://www.emmanuelmorand.net/supTSI-1213/supTSI-1213.php. Cours de TSI (accessible au 01/06/2015).

[13] Lycée Pierre-Paul RICQUET. http://pedagogie.ac-toulouse.fr/lyc-riquet-saint-orens/TSI-Maths/1tsi/html/cours.php. Cours de TSI (accessible au 01/06/2015).

[14] Jacques ROGNAUX. http://www.tsisoa.com/spip/Cours-de-Jacques-Rogniaux.html. Cours de TSI (accessible au 01/06/2015).

Table des matières