Révisions de lycée
Devoir Surveillé du 14 octobre 2023 - Durée 1h30

Proposition de correction

Exercice 1 (Suites, Intégrales, Trigonométrie : (7 point(s).)).

1. Soit (U_n) et (V_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$U_n = \frac{1}{4n+1} \qquad ; \qquad V_n = -\frac{1}{4n+3}$$

   a) Déterminer les limites de ces suites.
   b) Déterminer les sens de variations de ces suites.
   c) Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

2. Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

   a) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que (U_n) et (V_n) sont des suites extraites de (I_n).
   c) En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   d) Montrer que (I_n) est bornée.

1.
   a) (1 point(s).) Elles tendent toutes les deux vers 0.
   b) (1 point(s).) (U_n) est décroissante alors que (v_n) est croissante (on peut soit calculer la différence, soit le rapport entre deux termes consécutifs).
   c) (1 point(s).) La limite de la différence tends vers 0 (et les sens de variations sont cohérents).

2.
   a) (2 point(s).) $I_{2n} = 0$, $I_{4n+1} = U_n$ et $I_{4n+3} = V_n$.
   b) (0.5 point(s).) Voir réponse précédente.
   c) (1 point(s).) Donc elle tends vers 0 (car les 3 suites extraites tendent vers 0.
   d) (0.5 point(s).) Elle converge donc bornée.

Exercice 2 (Équations et inéquations : (5 point(s).)). Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3}$
2. $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-x-6}$
3. $|x-3| < -2$
4. $|x-2| > |2x-2|$

1. (1 point(s).) Nous devons avoir $x > 2$ et $x > \frac{3}{2}$, donc $x > 2$. Tout étant alors positif, nous pouvons ôter les racines carrées (élever au carré) et nous résolvons alors $x - 2 = 2x - 3$, soit $x = 1$. La solution trouvée n'étant pas dans le domaine de d'étude, il n'y a pas de solution.
2. (1.5 point(s).) L'équation revient à $\sqrt{x-3} = \sqrt{(x-3)(x+2)}$. On remarque déjà que $x = 3$ est solution, mais étudions tout de même le domaine de validité de l'équation. Nous devons avoir $x \geq 3$ et $\big((x \geq 3 \text{ et } x \geq -2) \text{ ou } (x \leq 3 \text{ et } x \leq -2)\big)$. Ce qui nous donne simplement $x \geq 3$. Dans ces conditions, nous pouvons ôter les racines carrées, ce qui donne, après factorisation : $(x-3)(x-1) = 0$. Les solutions sont donc $x = 3$ et $x = 1$. Or seul la première est dans le domaine de validité. Donc l'unique solution est $x = 3$.
3. (0.5 point(s).) Pas de solutions. Note aux correcteurs : Mettre 0 si trop de calculs (si l'élève commence à distinguer les cas $x > 3$ et $x < 3$) car cela veut dire qu'il n'a pas compris ce qu'est une valeur absolue.
4. Note aux correcteurs : Mettre 0 aux étapes intermédiaires si les solutions sont fausse (s'il ne restreint pas la solution au domaine d'étude)
   - (0.5 point(s).) Si $x \geq 2$, alors l'équation devient $x - 2 > 2x - 2$, soit $x < 0$. Donc il n'y a pas de solutions.
   - (0.5 point(s).) Si $x \in [1;2]$, alors l'équation devient $2 - x > 2x - 2$, soit $x < \frac{4}{3}$. Les solutions sont donc $x \in \left[1; \frac{4}{3}\right[$.
   - (0.5 point(s).) Si $x \leq 1$, alors l'équation devient $2 - x > 2 - 2x$, soit $x > 0$. Les solutions sont donc $]0;1]$.

   (0.5 point(s).)Au final, les solutions sont $x \in \left]0; \frac{4}{3}\right[$.

Exercice 3 (Dérivation, Intégrales, Logarithmes, Exponentielles, Fonctions puissances : (4 point(s).)).
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x^{(x^2)}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. Déterminer une primitive de f.

1. (1 point(s).) L'exposant doit être positif, ce qui est le cas, puisque $x^2 \geq 0$. Ce qui est dans le logarithme doit être strictement positif. Donc le domaine de définition est $D = \mathbb{R}_+^*$.
2. (1 point(s).) Nous avons pour tout $x \in D$, $f(x) = x^2 \ln(x)$. Nous avons donc juste à dériver un produit : $f'(x) = 2x\ln(x) + x$.
3. (2 point(s).) Nous allons faire une intégration par partie en posant $u = \ln(x)$, $u' = \frac{1}{x}$, $v' = x^2$, $v = \frac{x^3}{3}$. Ainsi, une primitive de f est :

$$uv - \int u'v = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}\left(\ln(x^3) - 1\right)$$

Exercice 4 (Calculs dans $\mathbb{R}$: (? point(s).)).

1. Soit la courbe d'équation, dans un repère cartésien :

$$4x^2 + 36y^2 - 8x - 108y + 55 = 0$$

a) Déterminer son équation réduite.
b) Identifier la conique.

2. Écrire à l'aide de factorielles l'expression suivante :

$$\prod_{k=4}^{n^2} k^3$$

1.

a) (1.5 point(s).) L'équation réduite est

$$\frac{2}{15}(x-1)^2 + \frac{3}{10}(2y-3)^2 = 1$$

b) (0.5 point(s).) Nous avons donc à faire à une ellipse.

2. (2 point(s).)

$$\prod_{k=4}^{n^2} k^3 = \frac{\prod_{k=1}^{n^2} k^3}{\prod_{k=1}^{3} k^3} = \frac{\left((n^2)!\right)^3}{(3!)^3}$$