

**Contrôle continu 2 - Algèbre A1**  
**09 décembre 2023 - Durée : 60 min**

Vous devez ajouter votre numéro de groupe de TD dans l'en-tête de votre copie.

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

**La clarté de la rédaction et la précision des raisonnements, entreront dans l'appréciation de votre copie. En particulier, toute affirmation doit être justifiée**

**Question de cours:**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles donnés et  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  fini ou non. On considère une famille de parties  $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(E)$  et  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  une application.

1. Donner la définition des ensembles  $\bigcup_{i \in I} A_i$  et  $\bigcap_{i \in I} A_i$

2. Montrer que  ${}^c \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} {}^c A_i$

**Exercice 1:**

Montrer que si  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $a + \sqrt{2}b = 0$  alors  $a = b = 0$ .

**Exercice 2:**

On considère la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1, & u_2 = 2, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad (1)$$

Démontrer que  $1 \leq u_n \leq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 3:**

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ . On rappelle que la différence symétrique de  $A$  et  $B$  est :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Faire le diagramme de Venn pour  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $B = \{3, 6, 7\}$ . Déterminer  $A \Delta B$ .
2. Montrer que  $A \Delta B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$ .
3. Montrer que  $A \Delta B = A \Delta C$  si, et seulement si  $B = C$ .
4. Résoudre l'équation d'inconnue  $X \in \mathcal{P}(E)$  :  $A \Delta X = \Phi$ .