

Contrôle continu 2 - Algèbre A1
09 décembre 2023 - Durée : 60 min

Vous devez ajouter votre numéro de groupe de TD dans l'en-tête de votre copie.

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

La clarté de la rédaction et la précision des raisonnements, entreront dans l'appréciation de votre copie. En particulier, toute affirmation doit être justifiée

Question de cours:

Soit E et F deux ensembles donnés et I un sous-ensemble de \mathbb{N} fini ou non. On considère une famille de parties $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(E)$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application.

1. Donner la définition des ensembles $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$

2. Montrer que ${}^C \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} {}^c A_i$

Exercice 1:

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + \sqrt{2}b = 0$ alors $a = b = 0$.

Exercice 2:

On considère la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1, & u_2 = 2, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1} & \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \end{cases} \quad (1)$$

Démontrer que $1 \leq u_n \leq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3:

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E . On rappelle que la différence symétrique de A et B est :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Faire le diagramme de Venn pour $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{3, 6, 7\}$. Déterminer $A \Delta B$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$.
3. Montrer que $A \Delta B = A \Delta C$ si, et seulement si $B = C$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $A \Delta X = \Phi$.