CC2 Algèbre

Question de cours : $\boxed{4 \text{ pts}}$

Soient E et F deux ensembles donnés et I un sous-ensemble de IN fini ou non.
Soit $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(E)$

1) On a $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in E / \exists i\in I, x\in A_i\}$ 0,5

2) $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in E / \forall i\in I, x\in A_i\}$ 0,5

3) Montrons que $\forall (i,j)\in I^2, \overline{(A_i\cup A_j)} = \overline{A_i}\cap\overline{A_j}$

Procédons par double inclusion.

Soit $x\in\overline{A_i\cup A_j}$. Alors $x\notin A_i\cup A_j$

Ainsi $x\notin A_i$ et $x\notin A_j$

Donc $x\in\overline{A_i}\cap\overline{A_j} \Rightarrow \overline{A_i\cup A_j}\subset\overline{A_i}\cap\overline{A_j}$

Soit $x\in\overline{A_i}\cap\overline{A_j}$. Alors $x\in\overline{A_i}$ et $x\in\overline{A_j}$

Ainsi, $x\notin A_i$ et $x\notin A_j \Rightarrow x\in\overline{A_i\cup A_j}$

D'où $\overline{A_i}\cap\overline{A_j}\subset\overline{A_i\cup A_j}$.

Conclusion : $\overline{A_i\cup A_j} = \overline{A_i}\cap\overline{A_j}$ 2

Généralisation :

On a $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$ 1

Exercice 1 : $\boxed{3 \text{ pts}}$

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tq $a+\sqrt{2}b=0$.

Montrons que $a=b=0$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a\neq b\neq 0$. On a $a=-\sqrt{2}b$ où $(a,b)\in\mathbb{Z}$

Alors, $\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$. Il vient que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Cela est absurde.

Exercice 2 : 5 pts

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_1=1, U_2=2 \\ U_{n+1}=U_n+\frac{2}{n+1}U_{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\} \end{cases}$$

Montrons que $1 \leq u_n \leq n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Soit P_n l'assertion "$1 \leq u_n \leq n^2$".

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

Pour $n=1$ on a $u_1 = 1$ et donc $1 \leq u_1 \leq 1^2$

Pour $n=2$ $u_2 = 2$ et donc $1 \leq u_2 \leq 4$.

Donc P_0 et P_1 sont vraies

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que P_{n-1} et P_n sont vraies. Montrons que P_{n+1} est vraie. Il s'agit de montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$

On a par hypothèse de récurrence

$$\begin{cases} 1 \leq u_{n-1} \leq (n-1)^2 \\ 1 \leq u_n \leq n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} u_{n-1} \leq \frac{2(n-1)^2}{n+1} \\ 1 \leq u_n \leq n^2 \end{cases}$$

Alors $\frac{2}{n+1} + 1 \leq u_{n+1} \leq n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1}$

Or $1 \leq 1 + \frac{2}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1} = \frac{n^3+n^2+2n^2-4n+2}{n+1}$

Aussi, $n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1}$

Donc $(n+1)^2 - \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 - n^3 - 3n^2 + 4n - 2}{n+1}$

$= \frac{7n-1}{n+1} > 0$ car $n \geq 1$. Ainsi $u_{n+1} \leq (n+1)^2$

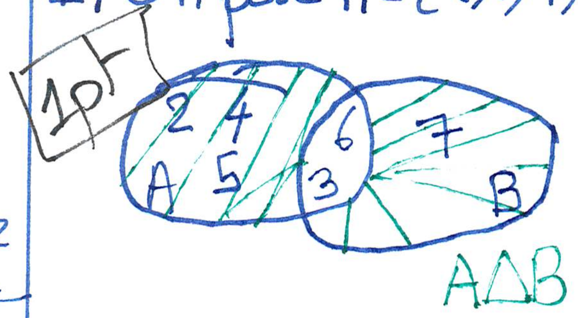
Finalement, $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$ ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence double permet d'affirmer que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. On a $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1) On pose $A = \{2,3,4,5,6\}$; $B = \{3,6,7\}$



$A \Delta B = \{2,3,4,5,6,7\} \setminus \{3,6\}$
$= \{2,4,5,7\}$

2) Montrons que $A\Delta B=(A\setminus(A\cap B))\cup(B\setminus(A\cap B))$

On a par définition,

$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$

$=(A\cap(\overline{A\cap B}))\cup(B\cap(\overline{A\cap B}))$

$=(A\setminus(A\cap B))\cup(B\setminus(A\cap B))$

$\boxed{3\text{pts}}$

3) Montrons que $A\Delta B=A\Delta C\Longleftrightarrow B=C$

Procédons par double implication.

Tout d'abord, si $B=C$, on a évidemment $A\Delta B=A\Delta C$. 0,5

Réciproquement, supposons que $A\Delta B=A\Delta C$ et montrons que $B=C$. 2,5

On procède par double inclusion. Soit $x\in B$.

1er cas: Si $x\in A$ alors $x\in A\cap B$ alors $x\notin A\Delta B=A\Delta C$. Cela montre que $x\in A\cap C$. Alors $x\in C$.

2ème cas : Si $x\notin A$ et $x\in B$ alors $x\in B\cap\bar{A}=B\setminus A$. Ainsi, $x\notin\bar{A}\Delta B$ et aussi $x\notin\bar{A}\Delta C$. Cela prouve que $x\in\bar{A}\cap C$. D'où $x\in C$.

Si $x\in C$ on a également deux cas :

1er cas: Si $x\in A$ alors $x\in A\cap C$ et donc $x\notin A\Delta C=A\Delta B$. Cela prouve que $x\in A\cap B$. D'où $x\in B$.

2ème cas: Si $x\notin A$ alors $x\in C\cap\bar{A}$

Il s'ensuit que $x\notin\bar{A}\Delta C=\bar{A}\Delta B$

Alors, $x\in\bar{A}\cap B$. D'où $x\in B$.

Conclusion : $B=C$ $\boxed{3\text{pts}}$

4) Résolvons l'équation $A\Delta X=\emptyset$ $\boxed{2\text{pts}}$

On observe que $A\Delta A=(A\cup A)\setminus(A\cap A)=A\setminus A=\emptyset$

Donc A est solution de l'équation.

Si X solution on a $A\Delta X=A\Delta A\Longleftrightarrow X=A$ donc $X=A$ unique sol