Notes pour le cours 1M004
Calcul matriciel [*]

Bruno Després

14 avril 2016

Les **matrices** constituent un outil remarquable et indispensable pour manipuler des données en relation avec l'algèbre linéaire, le calcul vectoriel et le calcul matriciel, et pour opérer les calculs qui s'y rapportent. Par définition une matrice A est un tableau rectangulaire de taille $m \times n$ de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

En toute généralité, les nombres qui composent la matrice peuvent être réels ou complexes. Nous nous limiterons au cas réel : $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. De même nous nous limiterons le plus souvent aux matrices de petite taille ce qui correspond à $n, m \leq 3$. Une définition complémentaire concerne les **vecteurs**.

Notation 0.1. *Il faut faire attention à la convention de notation visible dans (1). Par exemple a_{21} désigne le coefficient présent en ligne $i = 2$ et en colonne $j = 1$. Il faut donc séparer les indices pour donner un sens à la notation.*
Il sera parfois indispensable d'introduire une virgule "," pour bien faire cette distinction. Ainsi on aura aussi $a_{1,2} = a_{12}$.

L'objet ce cours concerne les manipulations que l'on peut réaliser à l'aide de matrices et de vecteurs. On se limitera le plus possible à des concepts introductifs élémentaires et en s'inspirant dans cet esprit pour la partie sur les déterminants en dimension $n = m = 3$ de la vision géométrique développée dans l'ouvrage de niveau L3 de P. Lax [3].
Merci d'envoyer toute remarque à l'adresse électronique **despres@ann.jussieu.fr**

[*]Remerciements à Sidi-Mahmoud Kaber pour son aide précieuse dans l'amélioration de ce texte.

1 Matrices

Considérons une collection de $m \times n$ nombres réels que l'on notera

$$(a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}.$$

Comme signalé plus haut voir (1), on décide de ranger ces nombres dans un tableau à deux entrées, que nous appellerons une **matrice rectangulaire** de taille $m \times n$.

Notation 1.1. *L'ensemble des matrices rectangulaires réelles de taille $m \times n$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.*

Les mêmes notations sont valables en remplaçant les nombres réels par des nombres complexes : ainsi on notera $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices rectangulaires à coefficients complexes $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Notation 1.2. *Toute matrice de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est identifiée à la connaissance de ses coefficients. On notera aussi $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$ ce qui veut dire que le coefficient a_{ij} se trouve en ligne i et en colonne j.*

La **matrice nulle** $O \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est constituée de coefficients tous nuls

$$O = (o_{ij}) \text{ avec } o_{ij} = 0 \quad \text{pour tous } i, j.$$

Remarque 1.3. *Remarque sur la notation des indices des coefficients : on notera de façon équivalente a_{ij} ou $a_{i,j}$. Dans certains cas, la deuxième écriture permet d'éviter les ambiguités, par exemple, dans la matrice D ci-dessous, on note $d_{n-1,n-1}$ le $n-1$ ème coefficient sur la diagonale.*

1.1 Matrices carrées

Les matrices carrés ont le même nombre de lignes et de colonnes. Elles jouent un rôle central dans la théorie.

Définition 1.4. *L'ensemble des* **matrices carrées** *réelles de taille $n \times n$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

On dira qu'une matrice carrée A est **diagonale** si et seulement $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$. Les matrices diagonales sont souvent notées par la lettre D. Le caractère diagonale est visible sur la structure matricelle

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

La **matrice identité** $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux valent 1

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice **triangulaire supérieure** T est telle que tous ses éléments sous-diagonaux sont nuls, soit $t_{ij} = 0$ pour $j < i$, ce qui correspond à

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{22} & \dots & \dots & t_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Une matrice **triangulaire inférieure** T est telle que tous ses éléments sur-diagonaux sont nuls : $t_{ij} = 0$ pour $i < j$. On a

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1,1} & t_{n-1,2} & \dots & t_{n-1,n-1} & 0 \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.5. *Montrer qu'une matrice est diagonale ssi elle est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.*

1.2 Exemples de problèmes modélisés par des matrices

Nous allons voir sur des exemples que la notation matricielle permet de synthétiser facilement quelques problèmes fondamentaux.

1.2.1 Rotations du plan

Notre premier exemple concerne la géométrie du plan. Tout point $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ du plan cartésien est repéré également par ses coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ avec

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Considérons une rotation centrée à l'origine d'angle $\phi \in \mathbb{R}$. Le point M se transforme ainsi en M' avec

$$x' = r\cos(\theta + \phi), \quad y' = r\sin(\theta + \phi).$$

Un développement montre que

$$\begin{cases} x' = r\left(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\right), \\ y' = r\left(\cos\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\phi\right). \end{cases}$$

Ou encore après réarrangment

$$\begin{cases} x' = \cos\phi\ x - \sin\phi\ y, \\ y' = \sin\phi\ x + \cos\phi\ y. \end{cases} \tag{2}$$

Il est possible d'utiliser la notation matricielle pour rendre plus compact et lisible ce simple calcul. Pour se faire, nous définissons alors deux **vecteurs verticaux** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Nous définissons également la matrice dite de rotation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Nous décidons, c'est arbitraire pour l'instant mais sera justifié plus bas, d'une opération de multiplication d'un vecteur par une matrice sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Cette définition sera étendue plus tard en toute taille de vecteurs.

Notation 1.6. *Avec ces notations le système (2) sera également noté*

$$X' = AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Cette notation correspond à définition générale du produit AX *qui sera donnée dans la section suivante.*

1.2.2 Evaluation d'un coût multiple

Considérons trois substances chimiques dont les masses sont x, y et z. Considérons que les volumes par unité de masse sont respectivement $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Considérons que les coûts à l'achat par unité de masse sont respectivement $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. Le volume total et le prix à l'achat sont

$$\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ \alpha x + \beta y + \gamma z \end{pmatrix}.$$

La matrice rectangulaire des coefficients de ce problème est

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

On écrira

$$\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1.3 Vecteurs et multiplication matrice-vecteur

Les exemples précédents soulignent l'intérêt de la définition qui suit.

Définition 1.7. *Un vecteur de $X \in \mathbb{R}^n$ est une collection de n nombres réels, que nous rangerons verticalement*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On remarquera qu'un vecteur de taille n peut être conçu comme une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est à dire à une seule colonne.

On définit naturellement **l'addition de deux vecteurs de même taille** : pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$Z = X + Y \in \mathbb{R}^n \text{ est défini par } z_i = x_i + y_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Le vecteur nul est tel que toutes ses composantes sont nulles. On définit tout aussi naturellement la **multiplication d'un vecteur par un nombre** : pour $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$Y = \lambda X \in \mathbb{R}^n \text{ est défini par } y_i = \lambda x_i \quad i = 1, \dots, n.$$

L'adjectif **naturellement** veut dire que l'on considère des extentions en toute dimension de notions **bien connues** en dimension deux et trois.

Définition 1.8. *La norme (euclidienne) d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ est définie par*

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

De façon complémentaire le produit scalaire (euclidien) de deux vecteurs de même taille $X, Y \in \mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La norme d'un vecteur en dimension trois est en fait sa longueur. Un peu moins évidente, ne serait ce que d'un point de vue calculatoire, est l'opération suivante.

Définition 1.9. *La multiplication d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ par une matrice de $A = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un vecteur $Y \in \mathbb{R}^m$ noté $Y = AX$, dont les coefficients sont définis par la règle de calcul suivante. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$ et $X = (x_j)_{\ 1 \le j \le n}$. Alors $Y = (y_i)_{\ 1 \le i \le m}$ se détermine par*

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots a_{in} x_n \text{ pour tout } i = 1, \dots, m.$$

On note encore

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \forall i = 1, \dots, m. \tag{5}$$

On notera que chaque ligne de la matrice possède exactement le même nombre d'éléments que le vecteur X, soit n. Il suffit alors "d'appliquer" chaque ligne de la matrice sur le vecteur pour obtenir le résultat. C'est la méthode ligne-colonne.

Exercice 1.10. *Représenter graphiquement la structure ligne-colonne de la multiplication matrice-vecteur (5).*

1.4 Autres opérations

Nous détaillons dans ce qui suit les opérations de base que l'on peut effectuer avec des matrices. Il faut faire extrêmement attention au fait que, pour la plupart, ces opérations nécessitent des relations de compatibilité entre les tailles des matrices.

Définition 1.11. *On peut additionner* **deux matrices de même taille**. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. *Le résultat est* $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour tout } i \text{ et tout } j.$$

On écrira $C = A + B$.

Par exemple

$$\begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.12. *On peut multiplier une matrice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *par un nombre quelconque* λ. *Le résultat est* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *avec*

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \text{ pour tout } i \text{ et tout } j.$$

On écrira $B = \lambda A$.

Définition 1.13. *Soient deux matrices,* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *(noter que le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B*). On définit le produit* $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ *de la façon suivante*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall 1 \le i \le m \text{ et } 1 \le j \le p.$$

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 12 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.14. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. *Déterminer directement les nombres de lignes et colonnes de* $C = AB$. *Calculer les coefficients de* C.

Exercice 1.15. *Peut-on calculer* BA *?*

Proposition 1.16. *La multiplication des matrices est associative : soient* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$, *alors*

$$(AB)C = A(BC).$$

Les coefficients de $D = AB$ sont

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le p.$$

Donc les coefficients de $E = DC$ sont

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{p} d_{ij} c_{jr}, \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le r \le q.$$

Donc

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) c_{jr} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} c_{jr} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj} c_{jr} \right).$$

Nous pouvons écrire cette dernière quantité sous la forme

$$e_{ir} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_{kr}, \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le r \le q.$$

Les coefficients f_{kr} sont ceux de $F = BC$. Cette dernière égalité exprime donc le fait que les coefficients de DC sont égaux aux coefficients de AF. D'où $DC = AF$, c'est à dire $(AB)C = A(BC)$.

Notation 1.17. *Comme les parenthèses n'apportent pas d'information, on les enlèvera. Aussi le produit de trois matrices sera noté* ABC, *étant entendu bien sûr que la règle de compatibilité des tailles* m, n, p *et* q *est toujours nécessaire.*

1.5 Remarques sur le produit de matrices carrés

L'opération de produit de deux matrices est plus simple lorsque les matrices sont carrés de même taille, car alors il n'y a plus de restriction sur les dimensions des matrices en question. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on peut calculer le produit $C = AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
À partir de la multiplication, on peut sans peine calculer la puissance p-ième d'une matrice carrée

$$A^p = \underbrace{AA\dots A}_{p \text{ fois}}$$

avec pour convention que $A^0 = I$.

Exercice 1.18. *Vérifier que ceci est équivalent à la définition suivante par récurrence : on définit tout d'abord $A^0 = I$; puis pour tout $p \in \mathbb{N}$*

$$A^{p+1} = AA^p.$$

On pourrait alors penser que le produit de deux matrices de même taille est une opération très proche du produit de deux nombres réels. **Il n'en est absolument rien. Ce serait une erreur grave de faire cette confusion**. Il s'agit d'un fait majeur du calcul matriciel que nous allons appréhender à l'aide de quelques exemples sous la forme d'exercices.

Exercice 1.19. *On pose* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Vérifier que $AB \neq BA$.*

Enoncé autrement, la **multiplication matricielle n'est pas commutative**.

Exercice 1.20. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que $A^2 = 0$. Montrer que $AB = 0$.*

On comparera avec la situation en dimension $n = 1$ pour laquelle les matrices sont les nombres réels usuels, ce que l'on peut écrire $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}$, si $a^2 = 0$ alors $a = 0$. Pour les matrices de taille plus grande ou égale à 2, $A^2 = 0$ n'implique pas la nullité de A.
Nous serons aussi intéressés par trouver des matrices carré A et B dont le produit est égal à la matrice identité, ce que nous noterons

$$AB = I. \tag{6}$$

Dans le cas $n = 1$, cele revient à écrire $ab = 1$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Dans ce cas les nombres a et b sont les inverses l'un de l'autre, ce qui implique entre autres que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Exercice 1.21. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Trouver T triangulaire supérieure telle que $AT = I$. Vérifier que $TA = I$.*

On note que $0 + A = A + 0$ et $IA = AI = A$ pour toute matrice carrée A.

Exercice 1.22. *Montrer qu'il existe 4 matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le carré est égal à I.*

1.6 Transposition

La transposition d'une matrice correspond à la simple inversion (ou symétrisation par rapport à la diagonale principale pour une matrice carrée) de ses lignes et colonnes : les lignes deviennent les colonnes et réciproquement.

Définition 1.23. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La* **matrice transposée** *de A, notée A^T (on utilise aussi la notation ${}^tA$), est définie par*

$$B = A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \text{ avec } b_{ij} = a_{ji} \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

La transposition des matrices est liée en profondeur avec la produit scalaire comme le montre la propriété suivante.

Proposition 1.24. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une* **matrice carrée**. *Alors $A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la seule matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle*

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, BY \rangle \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Un calcul direct montre que

$$\langle AX, Y \rangle = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) y_i$$

que nous pouvons écrire en commutant les opérateurs somme

$$\langle AX, Y \rangle = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j y_i = \sum_j x_j \left(\sum_i a_{ij} y_i \right).$$

De même, si $B = (b_{ij})$,

$$\langle X, BY \rangle = \sum_i x_i \left(\sum_j b_{ij} y_j \right).$$

Le point important est que l'on peut échanger le nom des indices dans les sommes et écrire

$$\langle X, BY \rangle = \sum_j x_j \left(\sum_i b_{ji} y_i \right).$$

Donc

$$\langle AX, Y \rangle - \langle X, BY \rangle = \sum_j x_j \left(\sum_i (a_{ij} - b_{ji}) \, y_i \right).$$

Il s'ensuit que si $B = A^T$, alors $b_{ji} = a_{ij}$ donc $\langle AX, Y \rangle - \langle X, BY \rangle = 0$ pour tout (X, Y).
Réciproquement supposons que $\langle AX, Y \rangle - \langle X, BY \rangle = 0$ pour toute paire (X, Y). On choisit deux indices $1 \leq p, q \leq n$. Prenons le vecteur X_p tel que $x_j = 0$ pour tout $j \neq p$ et $x_p = 1$. De même le vecteur Y_q tel que $y_i = 0$ pour tout $i \neq q$, et $y_q = 1$. Alors $\langle AX_p, Y_q \rangle = a_{qp}$ et $\langle X_p, BY_q \rangle = b_{pq}$. Donc

$$a_{qp} - b_{pq} = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout (p, q) on en déduit que $B = A^T$.

Remarque 1.25. *La propriété précédente est utilisée sous la forme*

$$\langle AX, Y \rangle = \left\langle X, A^T Y \right\rangle.$$

Énoncé autrement la matrice A peut passer dans le deuxième terme du produit scalaire, mais sous forme transposée.

Exercice 1.26. *Montrer que $(A^T)^T = A$.*

2 Résolution de systèmes linéaires : $n = 2$

Ce **chapitre de révision** concerne un problème de géométrie classique bien connu et qu'il faut **maitriser parfaitement** : la détermination des points d'intersection de droites dans le plan.
Les points du plan sont repérés par leurs coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations

$$\mathcal{D} : \quad ax + by = c \tag{7}$$

et

$$\mathcal{D}' : \quad a'x + b'y = c'. \tag{8}$$

Par définition $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Il est bien connu que

- Soit (a, b) est colinéaire à (a', b') auquel cas les droites sont parallèles. L'intersection est réduite à l'ensemble vide, ou est égale à la totalité des droites qui sont confondues.
- Soit (a, b) n'est pas colinéaire à (a', b'). Les droites s'intersectent en un point et un seul.

Remarque 2.1. *Il est conseillé de représenter ces trois cas de figures graphiquement.*

Une formulation de la recherche des points d'intersection consiste à voir x et y comme les inconnues du système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \tag{9}$$

Une autre formulation consiste à définir la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ et le vecteur $Y = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$, puis à chercher $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme l'inconnue du système linéaire

$$AX = Y. \tag{10}$$

Nous allons étudier ces deux approches, (9) ou (10), dans ce qui suit.

2.1 Résolution de (9) par substitution/élimination

Pour fixer les idées nous cherchons à éliminer y. Supposons que l'un au moins des coefficients b ou b' est non nul. Par exemple $b \neq 0$. Alors

$$y = \frac{c - ax}{b}. \tag{11}$$

En reportant dans la deuxième équation, on obtient

$$a'x + b'\frac{c - ax}{b} = c',$$

ou encore

$$\left(a' - \frac{ab'}{b}\right) x = c' - \frac{cb'}{b}.$$

Supposons que

$$K = a' - \frac{ab'}{b} \neq 0.$$

Alors la solution (x, y) est donnée par

$$x = \frac{1}{K}\left(c' - \frac{cb'}{b}\right), \quad y = \frac{c - ax}{b}. \tag{12}$$

Proposition 2.2. *En supposant que $b \neq 0$, et que $K \neq 0$, la solution fournie par la méthode de substitution/élimination est donnée explicitement par les deux formules (12) puis (11).*
Sous ces conditions le système (9) possède donc une unique solution.

Exercice 2.3. *Calculer par cette méthode la solution de*

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 4, \\ -1x + 5y & = \pi. \end{cases} \tag{13}$$

L'inconvénient de cette méthode est que le choix du premier coefficient par lequel diviser n'est pas toujours automatique. Considérons l'exemple

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x & = 4, \\ 2x + y & = \pi. \end{array} \right.$$

Ici $b = 0$. Donc on ne peut pas appliquer directement la méthode de substitution/élimination telle que présentée. Pour autant ce système possède à l'évidence une solution unique $x = \frac{4}{3}$ et $y = \pi - \frac{8}{3}$. Plus généralement la méthode de substitution/élimination nécessite parfois d'être astucieux dans son emploi, par exemple en choisissant d'éliminer x ou y en partant de la première ou de la deuxième équation. Notons que cette méthode ne fournit cependant pas de compréhension générale du problème.

2.2 Résolution de (9) par combinaison linéaire

Cette méthode cherche également à éliminer une inconnue, mais sans division par b (ou b') comme dans l'exemple précédent).
Partons du système (9). On multiplie la première équation par b', la deuxième par b, et on fait la différence. On trouve

$$(ab' - a'b)\, x + (bb' - b'b)\, y = cb' - c'b,$$

ou encore

$$Dx = cb' - c'b \text{ avec } D = ab' - a'b. \tag{14}$$

Toujours en partant du système (9), on peut multiplier la première équation par a', la deuxième par a et faire la différence. On obtient

$$(aa' - a'a)\, x + (ba' - b'a)\, y = ca' - c'a,$$

ou encore

$$-Dy = ca' - c'a. \tag{15}$$

En supposant que $D \neq 0$, la solution est alors

$$x = \frac{cb' - c'b}{D} \text{ et } y = \frac{ca' - c'a}{-D}. \tag{16}$$

Proposition 2.4. *En supposant que $D \neq 0$, la solution fournie par la méthode de combisaison linéaire/élimination est donnée dans la formule (16).*
Sous cette condition le système (9) possède donc une unique solution.

Exercice 2.5. *Calculer la solution de (13) par cette méthode.*

On remarque que $bK = D$. Donc si la méthode de substitution marche ce qui revient à supposer que $b \neq 0$ et $K \neq 0$, alors $D \neq 0$ ce qui fait que la méthode par combinaison linéaire marche également. En ce sens la méthode par substitution apparait comme un cas particulier de la méthode par combinaisons qui est donc plus générale.

2.3 Résolution de (10) sous forme matricielle

A présent nous considérons le problème sous la forme matricielle (10)

$$AX = Y$$

où la matrice A est donnée et le second membre Y est donné.

2.3.1 Analyse

Au lieu de chercher à calculer le vecteur solution X immédiatement, nous commençons à nous poser la question de trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que soit $BA = I$, soit $BA = 0$ (mais B si possible non nulle). Pour être plus général nous noterons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière est construite à partir de

$$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.6. *Les matrices A et B commutent. Leur produit vaut*

$$AB = BA = (ad - bc)\, I.$$

La preuve est un simple calcul.
Il s'ensuit que

— Soit $ad - bc = 0$, alors $AB = BA = 0$.

— Soit $ad - bc \neq 0$. En posant $C = \frac{1}{ad-bc}B$, on obtient directement

$$CA = AC = I.$$

L'importance de la quantité $ad - bc$ est telle qu'on lui donne un nom.

Définition 2.7. *Le* **déterminant** *de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, noté $det(A)$, est la quantité*

$$det(A) = ad - bc.$$

Nous supposons à présent que $\det(A) \neq 0$. Soit

$$C = \frac{1}{\det(A)} B = \frac{1}{ab - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

On a $AC = CA = I$.

Proposition 2.8. *Sous l'hypothèse $det(A) \neq 0$, pour tout $Y \in \mathbb{R}^2$ donné, l'unique solution $X \in \mathbb{R}^2$ de $AX = Y$ est $X = CY$.*

Il y a au moins deux façons de comprendre l'unicité de cette solution. Une première consiste à supposer que $AX = Y$ puis à effectuer la suite de calcul

$$CY = CAX = (CA)X = IX = X.$$

Cela fournit X par une formule unique et montre aussi l'existence de la solution.
Une deuxième façon de comprendre l'unicité consiste à supposer qu'il existe deux solutions X_1 et X_2 telles que $AX_1 = Y$ et $AX_2 = Y$. Donc par différence $A(X_1 - X_2) = 0$. Puis en reprenant le calcul précédent

$$0 = C\,(A(X_1 - X_2)) = (CA)(X_1 - X_2) = X_1 - X_2.$$

Donc $X_1 = X_2$.

2.3.2 Application

Soit à nouveau le problème d'intersection des deux droites (7) et (8). Le vecteur $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. Le vecteur $n' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$. La matrice est

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.9. *Les vecteurs n et n' sont parallèles ssi $det(A) = 0$.*

Supposons par exemple que $n' = \lambda n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Donc $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$. Alors

$$\det(A) = ab' - a'b = a\lambda b - \lambda ab = 0.$$

Réciproquement supposons que $\det(A) = ab' - a'b = 0$. Le vecteur n' étant non nul, une de ses coordonnées est nécessairement non nulle : par exemple $b' \neq 0$. Posons $\lambda = \frac{b}{b'}$ de sorte que $b = \lambda b'$. Alors

$$a = \frac{b'a}{b} = \lambda a'.$$

Donc $n = \lambda n'$ est parallèle à n' ce qui termine la preuve.
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ssi n et n' sont parallèles. En conséquence on retrouve le fait que deux droites non parallèles s'intersectent en un point et un seul.

2.4 Résolution de (10) par la méthode d'élimination de Gauss

La méthode Gauss, que nous décrivons dans ce qui suit pour les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est la base des méthodes modernes de calcul pratique de solution de systèmes linéaires. Soit à calculer la solution de

$$AX = Y$$

avec $Y \in \mathbb{R}^2$ un vecteur donné et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice donnée.

2.4.1 Cas de matrices triangulaires

On commence par remarquer que le calcul de X serait immédiat si la matrice était triangulaire supérieure. Considérons en effet le problème plus simple $TX = Y$ avec

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} t_{11}x + t_{12}y & = c, \\ \qquad\quad t_{22}y & = c'. \end{cases}$$

On peut calculer la solution en *remontant*, c'est à dire en déterminant d'abord y puis x. La solution est

$$\begin{cases} y & = \frac{1}{t_{22}} c', \\ x & = \frac{1}{t_{11}} \left(c - t_{12}y\right). \end{cases}$$

La condition pour que ce calcul soit possible est que $t_{11} \neq 0$ et $t_{22} \neq 0$, c'est à dire une fois de plus $\det(T) \neq 0$. Tous calculs faits on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{11}t_{22}} \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ 0 & t_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Mise sous forme triangulaire

A présent nous considérons $AX = Y$ dans le cas général, qui s'écrit sous forme étendue

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = c, \\ a_{21}x + a_{22}y & = c'. \end{cases} \tag{18}$$

Proposition 2.10. *Supposons que $a_{11} \neq 0$. Alors ce système est équivalent au système triangulaire*

$$\begin{cases} a_{11}x & +a_{12}y & = c, \\ & \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\right) y & = c' - \frac{a_{21}}{a_{11}} c. \end{cases} \tag{19}$$

On multiplie la première ligne de (18) par $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ qui est correctement défini car $a_{11} \neq 0$ par hypothèse, puis on retranche le résultat à la deuxième ligne. Les systèmes (18) et (19) ont exactement la même solution (x, y). A présent, on résout le système (19) par la méthode de remontée décrite auparavant.

Remarque 2.11. *D'une certaine manière, la méthode de mise sous forme triangulaire est une substitution particulière.*

Remarque 2.12. *La méthode de Gauss est décrite comme un algorithme, c'est à dire une succession d'opérations élémentaires.*

3 Résolution de systèmes linéaires : $n = 3$

Nous considérons les systèmes linéaires $AX = Y$, avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^3$ donnés. L'inconnue est le vecteur $X \in \mathbb{R}^3$.

3.1 Équation d'un plan

Un plan de l'espace $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^3$ peut se décrire par la donnée de 2 vecteurs. L'un est un vecteur normal au plan $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$. L'autre est constitué des cooordonnées d'un point quelconque de ce même plan $M = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$.

Le plan correspond à l'ensemble des points $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que le vecteur qui relie M à X est orthogonal à n. C'est à dire

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0$$

Définissons $d = a\alpha + b\beta + c\gamma$. L'équation de ce plan est ainsi

$$\mathcal{P} : \quad ax + by + cz = d.$$

3.2 Intersection de 3 plans

Soient 3 plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$. Un point $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à ces 3 plans ssi ses coordonnées sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} ax + by + cz & = d \\ a'x + b'y + c'z & = d' \\ a''x + b''y + c''z & = d''. \end{array} \right. \tag{20}$$

Aussi déterminer l'intersection de trois plans est équivalent au calcul de la solution du système linéaire de taille trois $AX = Y$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}. \tag{21}$$

3.3 Résolution par la méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de calculer la solution en un nombre raisonnable d'opérations. De plus le déroulement des calculs fera apparaitre des conditions qui permettront d'affirmer que cette solution est unique. L'idée est, une fois de plus, d'effectuer un certain nombre d'opérations qui permettent de mettre la matrice du problème sous forme triangulaire. Une fois cette opération réalisée, il reste à calculer la solution une composante après l'autre.

3.3.1 Première étape

Partons de (20) que nous mettons sous la forme $AX = Y$. Nous faisons l'hypothèse que

$$a \neq 0. \tag{22}$$

Divisant la première ligne par a, nous obtenons

$$x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z = \frac{d}{a}. \tag{23}$$

En multipliant par a' et en soustrayant à la deuxième équation, nous faisons disparaitre x dans le résultat et obtenons

$$\left(b' - \frac{a'}{a}b\right) y + \left(c' - \frac{a'}{a}c\right) z = d' - \frac{a'}{a}d. \tag{24}$$

De même en multipliant (23) par a'' et en soustrayant à la troisième équation, nous obtenons

$$\left(b'' - \frac{a''b}{a}\right) y + \left(c'' - \frac{a''c}{a}\right) z = d'' - \frac{a'd}{a}. \tag{25}$$

Regroupant alors la première équation de (20) ainsi que (24) et (25), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{llll} ax & +by & +cz & = d \\ & ey & +fz & = g \\ & e'y & +f'z & = g'. \end{array} \right. \tag{26}$$

avec

$$e = b' - \frac{a'b}{a}, \quad f = c' - \frac{a'c}{a}, \quad g = d' - \frac{a'd}{a}$$

et

$$e' = b'' - \frac{a''b}{a}, \quad f' = c'' - \frac{a''c}{a}, \quad g' = d'' - \frac{a''d}{a}.$$

Ce problème est équivalent au précédent. Sa forme matricielle est

$$BX = Z$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & e' & f' \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} d \\ g \\ g' \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Remarque 3.1. *En comparant (21) et (27), nous voyons des zéros sont maintenant insérés dans la partie inférieure de la première colonne.*

3.3.2 Deuxième étape

Faisons une nouvelle hypothèse, qui est que $e \neq 0$. Alors on peut recommencer la construction et se rapprocher encore plus d'une matrice triangulaire supérieure.
On divise la deuxième ligne de (26) par e, et on la soustrait à la troisième ligne. Comme y est éliminé, on obtient

$$\left(f' - \frac{e'f}{e}\right) z = \left(g' - \frac{e'g}{e}\right). \tag{28}$$

Posons

$$h = f' - \frac{e'f}{e} \text{ et } i = g' - \frac{e'g}{e}.$$

En remplaçant la troisième équation de (26) par (28), on obtient le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{llll} ax & +by & +cz & = d \\ & ey & +fz & = g \\ & & hz & = i, \end{array} \right. \tag{29}$$

ou encore sous forme matricielle $CX = W$ avec

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} d \\ g \\ i \end{pmatrix}. \tag{30}$$

3.3.3 Dernière étape

Le système ayant été transformé sous forme triangulaire, on peut à présent le résoudre directement.
Faisons une dernière hypothèse qui est que $h \neq 0$. Comme nous avons déjà supposé que $a \neq 0$ et $e \neq 0$, on peut calculer la solution de (29) composante par composante, en partant du bas (c'est à dire de z). On obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} z = & \dfrac{i}{h}, \\ y = & \dfrac{g - fz}{e}, \\ x = & \dfrac{d - by - cz}{a}. \end{array} \right. \tag{31}$$

Les nombres (x, y, z) étant déterminés par ces formules, on en déduit par ailleurs l'unicité de cette solution.

Remarque 3.2. *Sous les conditions précitées ($a \neq 0$, $e \neq 0$ et $h \neq 0$), on retrouve le fait que l'intersection de trois plans se fait en un seul point.*

3.3.4 Que faire si $a = 0$, $e = 0$ ou $h = 0$?

La méthode de Gauss est efficace et réduit le calcul de la solution à une suite finie d'opérations semblables les unes aux autres. Cependant il est possible que l'un des coefficients $a = 0$, $e = 0$ ou $h = 0$ s'annule en cours de calcul. Dans ces conditions on peut se demander comment modifier l'agorithme pour continuer le calcul de la solution.
Une solution simple existe qui consiste à intervertir les lignes. Prenons l'exemple qui suit. Soit le problème $AX = Y$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il n'est pas possible d'effectuer la première étape de la méthode, car $a = 0$. Cependant on peut intervertir les lignes du système d'équations correspondant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y + 2z & = & 3, \\ 2x + 2y - z & = & -2, \\ 3x + 2y - 4z & = & 2, \end{array} \right.$$

par exemple sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y - z & = & -2, \\ 3x + 2y - 4z & = & 2, \\ y + 2z & = & 3. \end{array} \right.$$

A présent le problème est reformulé sous la forme $A'X = Y'$ avec

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Y' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La première étape de l'algorithme peut à présent se dérouler sans encombre.
La même possibilité de permutation de lignes peut aussi s'utiliser si $e = 0$ à la deuxième étape. En reprenant la notation de (27), cela demande que $e' \neq 0$. En revanche on ne pourra pas utiliser b (même s'il est non nul), car alors la permutation des lignes aurait pour effet de remettre $a \neq 0$ en deuxième ligne ! C'est bien sûr impossible.
Finalement si $h = 0$, il n'est pas possible de permuter les lignes et la division par h n'est pas possible. Une justification complète sera fournie à la section 4.5.2.

4 Déterminants

Nous étudions le déterminant des matrices.

4.1 Le déterminant comme aire ($n = 2$)

Reprenons un système linéaire en dimension $n = 2$ que nous écrivons

$$AX = Y \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}.$$

Les inconnues sont les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du vecteur X. Ce système peut s'écrire aussi

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = Y \tag{32}$$

où on a introduit les deux vecteurs colonne de A : $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Considérons la figure 1 dans laquelle le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ est décomposé en une infinité de parallélogrammes de côtés $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Chacun de ces parallélogrammes est obtenu en faisant varier les coordonnées dans des intervalles de longueur 1 : ainsi P_{nm} correspond à $x \in [n, n+1]$ et $y \in [m, m+1]$.

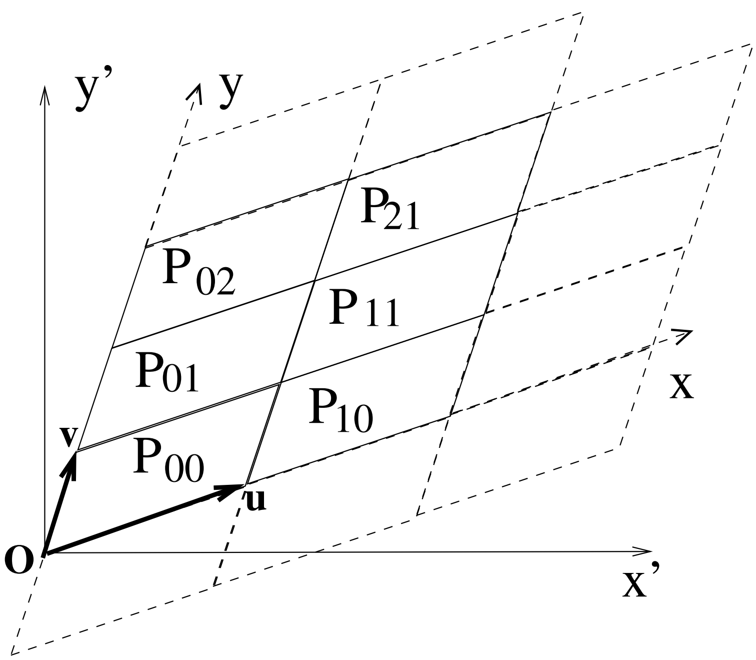

Figure 1 – Pavage du plan

A l'évidence l'ensemble de ces parallélogrammes réalise un pavage du plan **pourvu que l'aire du parallélogramme P_{00} soit strictement positive**. L'aire du parallélogramme élémentaire P_{00} se calcule aisément à partir de la figure 2.

Proposition 4.1. *L'aire de P_{00} vaut : Aire$(P_{00}) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.*

On a la formule géométrique Aire$(P_{00}) = \|\mathbf{u}\|h = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$, avec $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2}}$. Il sort

$$\text{Aire}(P_{00}) = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2}. \tag{33}$$

Or $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ et $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$. Donc

$$\text{Aire}(P_{00}) = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}.$$

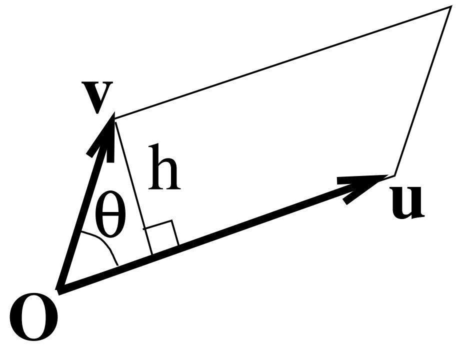

FIGURE 2 – Parallélogramme élémentaire de hauteur h. L'aire vaut $\|\mathbf{u}\|h = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$.

Développement, simplification et factorisation donnent

$$\text{Aire}(P_{00}) = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1|\,.$$

La preuve est terminée.
Les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont les colonnes de la matrice A et considérés dans cet ordre, mais dans la figure 2, on a supposé l'angle $\theta \in [0, \pi]$ (on considère l'angle orienté, dans le sens trigonométrique). Si la situation change (c'est à dire si on suppose que l'angle orienté entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est plus grand que π), on a encore un parallélogramme élémentaire $P_{00} = \{M = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}, 0 \leq x, y \leq 1\}$, qui dans une figure usuelle aurait encore un angle $\in [0, \pi]$ mais s'appuierait sur les vecteurs dans l'ordre $\mathbf{v}, \mathbf{u}$. On convient donc de définir *l'aire orientée* portée par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (dans cet ordre) en restaurant le signe.

Définition 4.2. *L'aire orientée portée par* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *est : Aire orientée*$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_1b_2 - a_2b_1$.

Ou encore

$$\text{Aire orientée}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(A).$$

Exercice 4.3. *Supposons que det*$(A) \neq 0$. *À partir de la figure 1, montrer par une méthode géométrique que pour tout* $Y \in \mathbb{R}^2$, *il existe un unique* $X \in \mathbb{R}^2$ *solution de* $AX = Y$.

Exercice 4.4. *On suppose que det*$(A) = 0$ *et* $A \neq 0$. *Montrer (par la même approche géométrique) que l'ensemble des* $Y \in \mathbb{R}^2$ *pour lesquels il existe* $X \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $AX = Y$ *est une droite.*

4.2 Le déterminant comme volume $(n = 3)$

Soit à présent

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Nous définissons les trois vecteurs

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur nul est noté $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Définition 4.5. *Le* **produit vectoriel** *de deux vecteurs* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ *et* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *est le vecteur* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ *défini par*

$$\mathbf{k} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1c_2 - c_1b_2 \\ c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}.$$

Par définition, le vecteur $\mathbf{k}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$: $\langle \mathbf{k}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Exercice 4.6. *Vérifier ces relations d'orthogonalité.*
Vérifier les relations : $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ *et* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

De la même façon que nous avions défini le parallélogramme élémentaire en dimension deux, nous définissons le parallélépipède élémentaire par

$$\mathcal{P} = \{M = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} \text{ pour } 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

qui est représenté à la figure 3. Ainsi le parallélépipède élémentaire $\mathcal{P}$ a pour sommets : $\mathbf{O}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$,

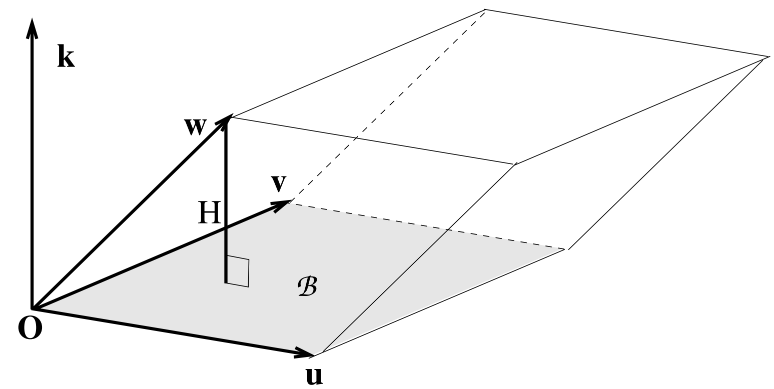

FIGURE 3 – Volume parallélépipèdique en dimension trois

$\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ et $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$. On peut voir aussi ce parallélépipède comme une élévation dans la direction $\mathbf{k}$ du parallélogramme plan de base $\mathcal{B}$ délimité par les quatre sommets $\mathbf{O}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Proposition 4.7. *L'aire de* $\mathcal{B}$ *est* $Aire(\mathcal{B}) = \|\mathbf{k}\|$.

On sait par (33) que $\text{Aire}(\mathcal{B})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2$: cette formule est **vraie dans le plan mais aussi dans l'espace** ; cela peut se justifier en remarquant qu'il suffit de faire une rotation dans l'espace pour amener le parallélogramme de base $\mathcal{B}$ (dont l'orientation est quelconque) dans le plan constitué des deux premières coordonnées pour lequel la formule (33) est correcte. Or une rotation préserve les longueurs $\|\mathbf{u}\|$ et $\|\mathbf{v}\|$. Mais comme elle préserve également toutes les longueurs, elle préserve aussi le produit scalaire $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Une preuve de ce point délicat est donnée à la proposition 5.4. Au final la formule (33) peut s'utiliser directement pour l'évaluation de l'aire d'un parallélogramme en dimension trois.
D'où

$$\text{Aire}(\mathcal{B})^2 = \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2.$$

Par ailleurs

$$\|\mathbf{k}\|^2 = (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2.$$

Par développement et identification on obtient l'égalité $\text{Aire}(\mathcal{B})^2 = \|\mathbf{k}\|^2$ ce qui clôt la preuve.
Pour continuer on note que $\text{Vol}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{B}) \times H$, où H est la hauteur dans la direction orthogonale à la base. Cette hauteur est obtenue en projetant le troisième vecteur $\mathbf{w}$ sur le vecteur orthogonal normalisé à un $\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$, , soit

$$H = |\langle \mathbf{k}', \mathbf{w} \rangle| = \frac{1}{\|\mathbf{k}\|} |\langle \mathbf{k}, \mathbf{w} \rangle| = \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{B})} |\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|$$

où nous avons utilisé le résultat de la proposition 4.7 et la définition de $\mathbf{k}$. Au final nous obtenons

Proposition 4.8. *Le volume (positif ou nul) de* $\mathcal{P}$ *est :* $Vol(\mathcal{P}) = |\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|$.

Définition 4.9. *Nous définissons le déterminant de la matrice* A *comme étant le volume signé de* $\mathcal{P}$*, soit* $det(A) = \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$*, ou encore*

$$det(A) = (b_1c_2 - c_1b_2)\, a_3 + (c_1a_2 - a_1c_2)\, b_3 + (a_1b_2 - b_1a_2)\, c_3. \tag{34}$$

La quantité $\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *est le* **produit mixte** *des vecteurs* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *et* $\mathbf{w}$*.*

On utilisera également la notation

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Proposition 4.10. *Le déterminant de A est nul ssi les 3 vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont situés dans un même plan.*

Si les 3 vecteurs sont situés dans un même plan, le volume du parallélépipède élémentaire est nul. C'est même une équivalence. On dit aussi que les vecteurs sont coplanaires : il existe 3 nombres (α, β, γ) non tous nuls tels que

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0.$$

Proposition 4.11. *Le déterminant est invariant par permutation circulaire globale des vecteurs*

$$det(A) = \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle .$$

Le déterminant change de signe si l'on échange deux vecteurs colonnes.

Pour montrer la deuxième propriété, il suffit de montrer que

$$\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = - \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle . \tag{35}$$

Or cela revient au fait que l'aire orientée du parallélogramme de base $\mathcal{B}$ change de signe si l'on échange $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Théorème 4.12. *Supposons que $det(A) \neq 0$. Soit $Y \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe une et une seule solution $X \in \mathbb{R}^3$ du système linéaire $AX = Y$.*

La preuve de l'existence est identique, en dimension 3, à celle de l'exercice 4.3. La preuve de l'uncité à partir de ce point de vue géométrique est un bon exercice.

Proposition 4.13. *Soient trois vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ et trois nombres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Alors*

$$det(\alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}, \gamma\mathbf{w}) = \alpha\beta\gamma\, det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

S'en convaincre en faisant un dessin !

Proposition 4.14. *Soient quatre vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Alors*

$$det(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = det(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + det(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

S'en convaincre en faisant un dessin !

Théorème 4.15 (Formules de Cramer)**.** *Supposons que $det(A) \neq 0$. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Soit X le vecteur solution de $AX = \mathbf{b}$. Alors les composantes (x, y, z) du vecteur X sont*

$$x = \frac{det(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}, \quad y = \frac{det(\mathbf{u}, \mathbf{b}, \mathbf{w})}{det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \text{ et } z = \frac{det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{b})}{det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}.$$

Notons que l'établissement de ces formules établit l'unicité de la solution. On a par exemple en utilisant les propositions précédentes

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \det(x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= x \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + y \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + z \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= x + y \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + z \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = x \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

car deux déterminants ont deux vecteurs égaux. Ils sont donc nuls. D'où le résultat. Les calculs de y et z sont similaires.

4.3 Développement suivant les lignes et les colonnes

Soit une matrice de taille deux $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Par analogie avec le cas tridimensionnel, on notera $\det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La formule (34) peut alors se récrire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{13} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{23} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{33}.$$

Nous remarquons de plus que le premier terme, associé à a_{31}, dépend de $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ qui est le déterminant de la matrice de taille deux obtenue en éliminant la première ligne et la troisième colonne. Nous généralisons cette remarque grâce à la définition.

Définition 4.16. *Pour $1 \leq i, j \leq 3$, le cofacteur Δ_{ij} est le déterminant de la matrice de taille deux obtenue en éliminant la première ligne i et la troisième colonne j multiplié par $(-1)^{i+j}$.*

Nous obtenons

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} \Delta_{i3} a_{i3}.$$

Cette formule est un cas particulier de développement du déterminant par rapport à une colonne donnée (ici la troisième).

Théorème 4.17. *Le déterminant d'une matrice peut se calculer en développant,*
soit par rapport à toute colonne

$$\mathit{det}(A) = \sum_{i=1}^{3} \Delta_{ij} a_{ij}, \qquad j = 1, 2 \ \mathit{ou}\ 3,$$

soit par rapport à toute ligne

$$\mathit{det}(A) = \sum_{j=1}^{3} \Delta_{ij} a_{ij}, \qquad i = 1, 2 \ \mathit{ou}\ 3.$$

Exercice 4.18. *Vérifier directement les formules de développement par rapport à une colonne ou à une ligne en partant de (34) que l'on développera et réorganisera.*

4.4 Produits

Une formule d'une **importance capitale** est la suivante.

Théorème 4.19. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ deux matrices quelconques. Le déterminant du produit est égal au produit des déterminants*

$$\mathit{det}(AB) = \mathit{det}(A)\,\mathit{det}(B).$$

Notons

$$A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Le calcul coefficient par coefficient de la matrice AB montre que

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w} & \beta_1\mathbf{u} + \beta_2\mathbf{v} + \beta_3\mathbf{w} & \gamma_1\mathbf{u} + \gamma_2\mathbf{v} + \gamma_3\mathbf{w} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w} & \beta_1\mathbf{u} + \beta_2\mathbf{v} + \beta_3\mathbf{w} & \gamma_1\mathbf{u} + \gamma_2\mathbf{v} + \gamma_3\mathbf{w} \end{pmatrix}$$

On peut alors utiliser les propositions 4.14 et 4.13 pour développer par rapport à tous les vecteurs présents dans les colonnes. Cela donne à priori $3 \times 3 \times 3 = 27$ termes. Cependant chaque fois que le même vecteur sera présent deux fois, le résultat sera nul en vertu de la proposition 4.10. On obtient

$$\det(AB) = \alpha_1\beta_2\gamma_3\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + \alpha_1\beta_3\gamma_2\det(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$$
$$+\alpha_2\beta_1\gamma_3\det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}) + \alpha_2\beta_3\gamma_1\det(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})$$
$$+\alpha_3\beta_1\gamma_2\det(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha_3\beta_2\gamma_1\det(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

La proposition 4.11 permet d'exprimer, au signe près, chacun des déterminants en fonction de $\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$. On obtient

$$\det(AB) = (\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1)\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$$

c'est à dire grâce à la formule (34)

$$\det(AB) = \det(B)\det(A).$$

4.5 Applications

Nous détaillons plusieurs conséquences de ces formules.

Proposition 4.20. *Soit une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont notés d_1, d_2 et d_3. Alors $det(D) = d_1d_2d_3$.*

Evident.

Proposition 4.21. *Soit une matrice triangulaire supérieure ou inférieure T dont les éléments diagonaux sont notés t_1, t_2 et t_3. Alors $det(D) = t_1t_2t_3$.*

Evident à partir du développement par rapport à la première colonne pour T triangulaire supérieure, et par rapport à la première ligne pour T triangulaire inférieure.

4.5.1 Déterminant des matrices de Gram

Soient deux groupes de trois vecteurs $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{u}',\mathbf{v}',\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^3$. Nous définissons la matrice de Gram dont les coefficients sont les produits scalaires deux à deux

$$G = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{u},\mathbf{u}'\rangle & \langle\mathbf{u},\mathbf{v}'\rangle & \langle\mathbf{u},\mathbf{w}'\rangle \\ \langle\mathbf{v},\mathbf{u}'\rangle & \langle\mathbf{v},\mathbf{v}'\rangle & \langle\mathbf{v},\mathbf{w}'\rangle \\ \langle\mathbf{w},\mathbf{u}'\rangle & \langle\mathbf{w},\mathbf{v}'\rangle & \langle\mathbf{w},\mathbf{w}'\rangle . \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.22. *On a la formule*

$$det(G) = det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \times det(\mathbf{u}',\mathbf{v}',\mathbf{w}').$$

Posons $A = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ et $B = (\mathbf{u}',\mathbf{v}',\mathbf{w}')$, ainsi que $A^T = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T \\ \mathbf{w}^T \end{pmatrix}$ où les vecteurs sont disposés en ligne et non plus en colonne comme pour A. On vérifie grâce aux formules de multiplication matricielle que $G = A^TB$. Donc

$$\det(G) = \det(A^T)\det(B).$$

Or la formule de calcul de $\det(A^T)$ en développant suivant les lignes montre que

$$\det(A^T) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T \\ \mathbf{w}^T \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \end{pmatrix} = \det(A).$$

D'où le résultat.
Dans le cas où les vecteurs sont égaux deux à deux, $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{u}',\mathbf{v}',\mathbf{w}')$, on obtient une formule alternative pour le calcul du volume du parallélépipède $\mathcal{P}$ dont les arêtes sont $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$

$$\sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle \\ \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \\ \langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle \end{pmatrix}} = \mathrm{vol}(\mathcal{P}).$$

En effet
$$\det\left(A^T A\right) = \det\left(A^T\right)\det(A) = \det(A)^2 = \mathrm{vol}(\mathcal{P})^2.$$
On pourra comparer avec une formule similaire (33) en dimension deux.

4.5.2 Pivotage dans l'algorithme de Gauss

La stratégie dite de pivotage est décrite plus haut lors de la présentation de la méthode de Gauss pour le calcul numérique de la solution de systèmes linéaires à la section 3.
Considérons la méthode de Gauss pour le calcul de la solution X de $AX = Y$, et supposons que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ de l'équation (21) possède un déterminant non nul.
Considérons la première étape de l'algorithme de Gauss pour la matrice A avec la notation (21) et supposons que $a = 0$ ce qui ne permet pas d'appliquer la première étape comme pour (22). La méthode suggérée consiste à chercher un coefficient non nul situé dans la première colonne, en dessous du coefficient a, puis à intervertir les lignes. Mais est-ce possible, autrement dit existe-t-il au moins un coefficient non nul dans la première colonne ? Si cela n'était pas le cas la matrice A serait de la forme
$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{pmatrix}.$$
Un développement du déterminant suivant la première colonne montrerait que le déterminant est nul, ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc il existe au moins un coefficient non nul dans la première colonne, ce qui permet d'intervertir les lignes si nécessaire et de transformer la matrice en B avec
$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & e' & f' \end{pmatrix}.$$
Ensuite on réalise que l'interversion de lignes change le signe du déterminant en vertu de la formule (35) appliquée aux lignes, et que l'opération de retranchement du produit d'une ligne à une autre ne change pas le déterminant. En utilisant les notations (27), cela se traduit par
$$\det(B) = \pm\det(A) \neq 0.$$
Il s'ensuit que les coefficients e et e' ne peuvent pas s'annuler en même temps, car sinon on aurait $\det(B) = 0$ ce qui n'est pas permis.
Donc quitte à intervertir les deux dernières lignes, on peut toujours transformer B en C à la troisème étape
$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$
Comme les opérations qui ont menés de B à C sont elles aussi du type interversion de lignes, ou retranchement du produit d'une ligne à une autre, le déterminant est inchangé au signe près, soit
$$\det(C) = \pm\det(B) = \pm\det(A) \neq 0.$$
Or un calcul direct montre que
$$\det(C) = a \times e \times h.$$
Donc $h \neq 0$, ainsi que $a \neq 0$ et $e \neq 0$ ce que l'on savait déjà. Au final la solution X est donnée par la formule (31).

4.5.3 Définition de la matrice inverse

Soit $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice donnée. Soit B la matrice constituée de vecteurs mis en ligne
$$B = \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})^T \\ \hline (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})^T \\ \hline (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^T \end{pmatrix}.$$

Les règles de multiplication matrice-matrice et les multiples possibilités de simplification font que

$$BA = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{pmatrix} = \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \, I.$$

Supposons que $\det(A) \neq 0$ et posons

$$C = \frac{1}{\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} B = \frac{1}{\det(A)} B,$$

on a donc démontré dans ce cas le résultat suivant.

Proposition 4.23. *On a $CA = I$.*

On peut aussi interpréter cette formule exacte à l'aide des cofacteurs. Notons les vecteurs sous forme développée

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.24. *La matrice B peut se récrire en fonction des cofacteurs sous la forme*

$$B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}.$$

La preuve est évidente : on vérifie coefficient par coefficient.
Il s'ensuit que la formule

$$BA = \det(A) I$$

peut se vérifier grâce aux formules de développement de déterminants suivant les colonnes. On peut immédiatement vérifier que

$$AB = \det(A) I$$

grâce aux formules de développements de déterminants suivant les lignes. Ces considérations se résument dans la proposition suivante.

Proposition 4.25 (Important)**.** *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle $CA = AC = I$ ssi $\det(A) \neq 0$. Lorsqu'elle existe, cette matrice est unique.*

Définition 4.26. *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la proposition précédente telle que $CA = AC = I$ est appelée* **matrice inverse de** *A. Elle est notée*

$$C = A^{-1}.$$

Les mêmes notations et propriétés sont vraies en dimension $n = 2$, et, en fait, en toute dimension.

Exercice 4.27. *Vérifier que la matrice inverse en dimension deux donnée par la formule (17) est aussi de la forme*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Donner les valeurs de ces cofacteurs Δ_{ij} obtenus à partir de l'élimination de la ligne i et de la colonne j pour $1 \leq i, j \leq 2$.

5 Applications linéaires

Les matrices peuvent aussi être vues comme la représentation concrète d'objets abstraits qui sont les applications linéaires. Nous considérons ici le cas tridimensionnel $n = 3$, mais beaucoup de ce qui va être présenté s'étend tel quel en toute dimension $n \in \mathbb{N}$.

Définition 5.1. *Soit une application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ayant les deux propriétés suivantes. Pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^3$ et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$F(x + y) = F(x) + F(y)$$

et

$$F(\lambda x) = \lambda F(x).$$

On dira que F est une **application linéaire***.*

Nous noterons

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

qui constituent ce qu'on appelle **la base canonique**.
Tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique sous la forme

$$X = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Proposition 5.2. *Une application linéaire F se caractérise de manière unique par une matrice $A_F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^3$*

$$F(X) = A_F X.$$

On dit que A_F est la **représentation matricielle** *de F.*

Plus précisément on dit que A_F est la représentation matricielle de F **relativement à la base canonique**. Cela laisse sous-entendre qu'il est possible d'obtenir une représentation matricielle de F relativement à une autre base : c'est exactement ce qui sera réalisé à la section suivante.
Posons à présent

$$\mathbf{u} = F(\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{v} = F(\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{w} = F(\mathbf{e}_3),$$

ainsi que

$$A_F = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

On a

$$F(X) = F(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = xF(\mathbf{e}_1) + yF(\mathbf{e}_2) + zF(\mathbf{e}_3) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}.$$

Or les règles du calcul matriciel sont telles que

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_F X.$$

Donc $F(X) = A_F X$. Il reste à montrer l'unicité de cette matrice. Supposons donc qu'il existe deux matrices A et B telles que $F(X) = AX = BX$ pour tout X. Posons $C = A - B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donc

$$CX = 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

Prenant $X = \mathbf{e}_1$, on aboutit à ce que la première colonne de C est nulle. De même en prenant $X = \mathbf{e}_2$ puis $X = \mathbf{e}_3$, on aura que les deuxième et troisième colonnes de C sont nulles. Donc $C = 0$ ce qui montre que $A = B$. Au final la représentation est unique.
On peut légitimement se demander quel est l'intérêt d'opérer une telle distinction alors que l'on s'empresse d'exprimer qu'une application linéaire est caractérisée au final par une matrice. Il se trouve que les applications linéaires peuvent aussi être définies sans l'aide des matrices, et que nous verrons aussi à la section qui suit que la représentation matricielle peut changer.

5.1 Exemples d'applications linéaires

Les définitions qui suivent visent à montrer l'intérêt qu'il y a à manipuler les applications linéaires à partir de leurs propriétés intrinsèques. La représentation matricielle n'est alors qu'une conséquence de ces propriétés fondamentales.

5.1.1 Isométries

Définition 5.3. *Une application linéaire* **isométrique** *est une application linéaire qui préserve la longueur des vecteurs.*

Enoncé autrement $\|FX\| = \|X\|$ pour tout X, ou encore

$$\langle A_F X, A_F X\rangle = \langle X, X\rangle \,.$$

Proposition 5.4. *De manière équivalente, les applications linéaires* **isométriques** *préservent le produit scalaire de tout couple de vecteurs.*

On a la formule

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{4}\|X+Y\|^2 - \frac{1}{4}\|X-Y, X-Y\|^2.$$

Donc

$$\langle FX, FY\rangle = \frac{1}{4}\|FX+FY\|^2 - \frac{1}{4}\|FX-FY\|^2 = \frac{1}{4}\|F(X+Y)\|^2 - \frac{1}{4}\|F(X-Y)\|^2.$$

F étant une isométrie, on a

$$\langle FX, FY\rangle = \frac{1}{4}\|X+Y\|^2 - \frac{1}{4}\|X-Y\|^2 = \langle X, Y\rangle \,.$$

L'identité $\langle FX, FY\rangle = \langle X, Y\rangle$ indique exactement que le produit scalaire est préservé par F

$$\langle A_F X, A_F Y\rangle = \langle X, Y\rangle \text{ pour tous } X \text{ et } Y \in \mathbb{R}^3.$$

En utilisant la matrice transposée A_F^T $\left\langle A_F^T A_F X, Y\right\rangle = \langle X, Y\rangle$, ou encore

$$\left\langle (A_F^T A_F - I)X, Y\right\rangle = 0 \text{ pour tous } X \text{ et } Y \in \mathbb{R}^3. \tag{36}$$

Proposition 5.5. *Les matrices A_F associées aux applications linéaires* **isométriques** *F sont telles que*

$$A_F^T A_F = I. \tag{37}$$

L'interprétation de cette formule est que les vecteurs colonnes de la matrice A_F

$$A_F = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \qquad \text{avec } \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^3 \quad i = 1, 2, 3$$

sont des **vecteurs orthogonaux de norme un**. On dit que ce sont des **vecteurs orthonormés**

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

C'est pour cela qu'une matrice vérifiant (37) est appelée **matrice orthogonale**.

Proposition 5.6. *Le déterminant de la matrice d'une application isométrique est égal soit à 1, soit à -1.*

Cela vient de

$$\det(A)^2 = \det(A^T)\det(A) = \det(A^T A) = \det(I) = 1.$$

Exercice 5.7. *Montrer en calculant son déterminant que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas orthogonale.

Exercice 5.8. *Montrer que la matrice de rotation définie par (3) correspond bien à une isométrie.*

5.1.2 Homothéties

Définition 5.9. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre donné. L'application linéaire qui multiplie tout vecteur par λ sera appelée l'homothétie de rapport λ et notée*

$$H_\lambda : \quad H_\lambda(X) = \lambda X \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 5.10. *Soit F une application linéaire (pas nécessairement une homothétie) telle que*

$$\|F(X)\| = \lambda \|X\| \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^3,$$

le nombre $\lambda \geq 0$ étant donné.
Montrer qu'il existe une matrice B avec $B^T B = I$ telle que $A_F = \lambda B$.

5.1.3 Projections

On peut se poser la question de faire correspondre une notion de projection mathématique avec ce qui est observé pour la propagation de la lumière : pensons par exemple à des rayons lumineux qui "projettent" un objet tridimensionnel sur un plan. Il se trouve qu'il est difficile de décrire une projection en toute généralité, car il faudrait distinguer suivant les paramètres qui définissent cette projection par exemple. Une définition efficace en terme de concision est la suivante.

Définition 5.11. *Une application linéaire F est une projection ssi l'application double de F est identique à son application simple, c'est à dire*

$$F(F(X)) = F(X) \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^3.$$

En reprenant l'exemple de rayons lumineux : "si l'on reprojette ce qui est obtenu sur un écran après une première projection, cela ne change pas l'image".

Proposition 5.12. *Soit F une application linéaire. Soit $A = A_F$ la matrice associée. Alors F est une projection ssi*

$$A^2 = A.$$

Cette proposition n'est que la traduction matricielle de la définition.

Exercice 5.13. *Vérifier que le déterminant d'une matrice de projection est soit nul soit égal à 1.*

6 Formule de changement de base

Une question couramment rencontrée est liée à ce qu'on appelle un changement de base. Nous commençons par la motiver sur un exemple.

6.1 Modélisation

Soit un élément X dans le plan : $X \in \mathbb{R}^2$. Nous considérons que la première composante x est le volume de l'espèce chimique I ; la deuxième composante y est le volume de l'espèce chimique J.
Supposons à présent qu'une réaction chimique ait lieu, qui transforme la composition chimique. Notons $Z = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ avec z le volume de l'espèce chimique I après réaction, et w est le volume de l'espèce chimique J après réaction. La relation étant linéaire, on supposera que

$$Z = AX, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{38}$$

La masse totale des deux espèces est

$$m = \alpha_I x + \alpha_J y$$

où α_I est la masse volumique de l'espèce I et α_J est la masse volumique de l'espèce J. En considérant que les espèces sont ionisées, la charge totale des deux espèces est

$$c = \beta_I x + \beta_J y$$

où β_I est la charge par unité de volume de l'espèce I et β_J est la charge par unité de volume de l'espèce J. On écrira $\begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \alpha_I & \alpha_J \\ \beta_I & \beta_J \end{pmatrix}$, ou encore $Y = PX$ avec $Y = \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Supposons maintenant que nous désirons caractériser la même réaction chimique, **non plus à l'aide des compositions en volume**, mais **en utilisant la masse totale et la charge totale**.
Enoncé autrement il s'agit de mesurer l'effet de la réaction chimique en utilisant la variable Y et non plus la variable X. La réaction chimique (38) est ici réductible à une application linéaire.

6.2 Cas général (en dimension $n = 3$)

Soit A la matrice d'une application linéaire. Tout vecteur $X = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ est transformé en

$$AX = x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 + x_3 A\mathbf{e}_3,$$

ce qui revient à dire que les colonnes de A sont dans l'ordre égales à $A\mathbf{e}_1$, $A\mathbf{e}_2$ et $A\mathbf{e}_3$.
Soient trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ tels que

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0. \tag{39}$$

On dira que ces trois vecteurs constituent **une base**, au même titre que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Exercice 6.1. *Vérifier que* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *est bien une base au sens où (39) est bien vérifié.*

Nous pouvons choisir deux façons de repérer un vecteur, soit par ses coordonnées x_1, x_2, x_3, soit par un autre jeu de coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 en écrivant que

$$X = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{u} + x'_2\mathbf{v} + x'_3\mathbf{w}.$$

Soit à présent le vecteur

$$X' = x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{e}_2 + x'_3\mathbf{e}_3.$$

Notons $P = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ la matrice de déterminant non nul, donc inversible. On a directement

$$X = PX'. \tag{40}$$

Définition 6.2. *La matrice P est appelée matrice de changement de base ou matrice de passage.*

Donc la matrice P est formée des trois colonnes, $P = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, où chaque colonne est constituée par les composantes des vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ dans la base canonique. L'inverse de la matrice, soit P^{-1}, permet décrire

$$X' = P^{-1}X.$$

Posons à présent $Y = AX$, ainsi que $Y' = P^{-1}Y$.

Proposition 6.3. *Soit F l'application linéaire associée à A. La matrice de la même application linéaire évaluée dans la nouvelle base (constituée par les vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$) est donnée par la* **formule de changement de base**

$$B = P^{-1}AP, \tag{41}$$

où P est la matrice $P = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, et on a $Y' = BX'$.

La preuve est facile et résulte des calculs précédents.
On vérifiera de plus que B et A ont même déterminant.

Le choix de la base dans laquelle on va représenter une application linéaire est motivé par la simplicité de la matrice associée : par exemple on cherchera une base telle que la matrice B soit triangulaire, ou même diagonale quand cela est possible.

Exercice 6.4. *Pour finir on reviendra sur le problème de modélisation précédent, et on montrera que l'effet de la réaction chimique dans les variables (masse, charge totale) s'exprime par PAP^{-1}.*

7 Vers l'algèbre linéaire en dimension supérieure

Les outils et méthodes présentés précédemment se généralisent en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et permettent de décrire des situations nettement plus complexes dans lesquelles l'intuition géométrique usuelle est préservée et est un guide sûr pour mieux comprendre les objets considérés.
On se contente dans ce qui suit de présenter quelques exemples élémentaires. On renvoie à un cours avancé pour des définitions rigoureuses et complètes, par exemple celle de la dimension d'un espace vectoriel.

7.1 Espace vectoriel de dimension finie

La notion fondamentale est celle d'**espace vectoriel de dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$, que nous avons en fait manipulée en dimensions $n = 2$ et $n = 3$: l'extension en dimension supérieure des définitions vectorielles et matricielles est immédiate. Par exemple l'ensemble des vecteurs X de taille n forme un espace vectoriel de dimension n : $E = \mathbb{R}^n$. Notons que les élements de $\mathbb{R}^n$ peuvent étre notés comme des n-uplets $(x_1, ...x_n)$, mais l'écriture usuelle des vecteurs de E (dans la base canonique) correspond elle à des vecteurs colonnes $X = (x_1, ...x_n)^T$.
On munit E de deux opérations qui sont l'**addition commutative des vecteurs**

$$\forall X, Y \in E, \quad X + Y = Y + X \in E$$

et la **multiplication par un scalaire**

$$\forall X \in E \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda X \in E.$$

La compatibilité entre ces opérations se caractérise par

$$\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y.$$

La multiplication d'un vecteur par une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit

$$Y = AX, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } X \in E,$$

et Y est un vecteur de E. On peut alors aussi définir une notion de déterminant (qui bien sûr prolonge ce qu'on a vu dans les cas $n = 2$ et $n = 3$), un résultat central en toute dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ étant qu'**une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul**. En conséquence le système linéaire

$$AX = b, \qquad b \text{ donné dans } E$$

possède une solution unique si et seulement si le déterminant de A, encore noté $\det(A) \in \mathbb{R}$, est non nul soit $\det(A) \neq 0$. On renvoie un cours d'algèbre linéaire pour la définition et les règles de calcul de $\det(A)$. On pourra réfléchir à comment on a obtenu la définition du déterminant dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à partir de celle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour voir ce que pourrrait être cette définition dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. L'esprit de la construction géométrique du chapitre sur les déterminants en dimension 2 et 3 est encore valable pour s'exercer à comprendre pourquoi la matrice inverse de A est correctement définie **dès que la déterminant est non nul**. La solution du système linéaire s'écrira alors

$$X = A^{-1}b.$$

7.2 Espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré $\leq n$

Le langage de l'algèbre linéaire s'applique aussi aux espaces de fonctions.
Soit par exemple $E = \mathcal{P}_n$, où

$$\mathcal{P}_n = \{\text{ensemble des fonctions polynômiales réelles de degré } \leq n\}.$$

Une fonction $p \in \mathcal{P}_n$ est telle que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Soient les fonctions monômiales

$$x \mapsto e_i(x) = x^i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

On écrira aussi

$$p = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \ldots a_n e_n = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i.$$

Il est clair que les relations d'addition et de multiplication par un scalaire énoncées plus haut sont vérifiées. Aussi $\mathcal{P}_n$ est un **espace vectoriel réel**. Sa dimension est finie, égale à $n+1$ qui est le nombre de paramètres (linéairement) indépendants qui définissent tout élément de $\mathcal{P}_n$. Le saut conceptuel majeur est que les fonctions monômiales sont à présent les vecteurs de base dans E. On pourra aussi considérer d'autres bases de E, c'est très utile par exemple quand on fait de l'interpolation (base des polynômes de Lagrange).

7.3 Espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle ordinaire

Considérons pour finir l'équation différentielle

$$-u''(x) - u(x) = 0. \tag{42}$$

Posons

$$E = \{\text{ensemble des fonctions } u \text{ solutions de (42)}\}.$$

Il est bien connu que les solutions réelles de cette équation sont toutes de la forme

$$u(x) = a \cos x + b \sin x, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ou encore

$$u = a \cos + b \sin$$

au sens de l'addition des fonctions. Cela montre que E est ici un espace vectoriel réel (de dimension deux) dont les deux vecteurs de base sont les fonctions $e_1 = \cos$ et $e_2 = \sin$. Les coefficients a, b qui caractérisent un élement particulier de E sont obtenus à partir de deux conditions initiales (par exemple $u(0)$, $u'(0)$) qui permettent définir de façon unique une solution de (42).

Références

[1] C. David, *Calcul vectoriel-Cours et exercices corrigés*, Dunod Sciences sup, 2012.

[2] C. Gilormini, *Calcul matriciel (texte imprimé) cours, exercices, tests*, Masson, 1984.

[3] P.D. Lax, *Linear algebra and its applications*, Wiley 2007.

[4] J.M. Poitevin, *Outils mathématiques pour ingénieurs et physiciens : rappels de cours et exercices corrigés*, Dunod, 2012.

[5] J.-E. Rombaldi, *Analyse matricielle : cours et exercices résolus* EDP sciences, 1999.

La référence [1] comprend nombre d'exercices très utiles et adaptés au niveau L1. Les ouvrages reprenant les éléments de base du calcul matriciel et de l'analyse matricielle pour l'art de l'ingénieur, et ses relations avec les autres disciplines, sont très nombreux dans les collections enseignement L1-L2 de l'UPMC, voir par exemple [2, 4, 5].

La référence [3] se caractérise par l'originalité de son point de vue géométrique et intuitif, développée par un maître en la matière. Elle est cependant d'un niveau élevé (L3).