Calculus - Analyse

Claire DAVID

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6

Faculté de Mathématiques

Table des matières

Table des figures

Première partie

Etudes de fonctions

Préambule

En Physique, Chimie, Géosciences, Ingénierie, on s'intéresse à des « grandeurs physiques » susceptibles d'être mesurées, qui sont nombreuses et variées : la longueur ℓ (en mécanique par exemple), la concentration c d'un produit donné dans une solution aqueuse, la durée t, la vitesse v, l'intensité I du courant électrique, l'énergie E, la pression P, la température T, etc ...

La modélisation des phénomènes conduit à relier ces grandeurs entre elles par des lois. Ainsi, une grandeur donnée G peut s'exprimer en fonction d'une - ou plusieurs - autre(s), qui seront traitées, selon le contexte, comme des variables ou des paramètres.

Chapitre 1

Continuité d'une fonction en un point

Définition 1. Continuité en un point (Caractérisation de Weierstrass)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. La fonction f est dite ***continue en*** a si, pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif η tel que, pour tout réel x de I vérifiant $|x-a| \leqslant \eta$, on ait $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$, soit, en langage formalisé [1] :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I : \quad |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$

1. Cette caractérisation a été donnée par le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815-1897).

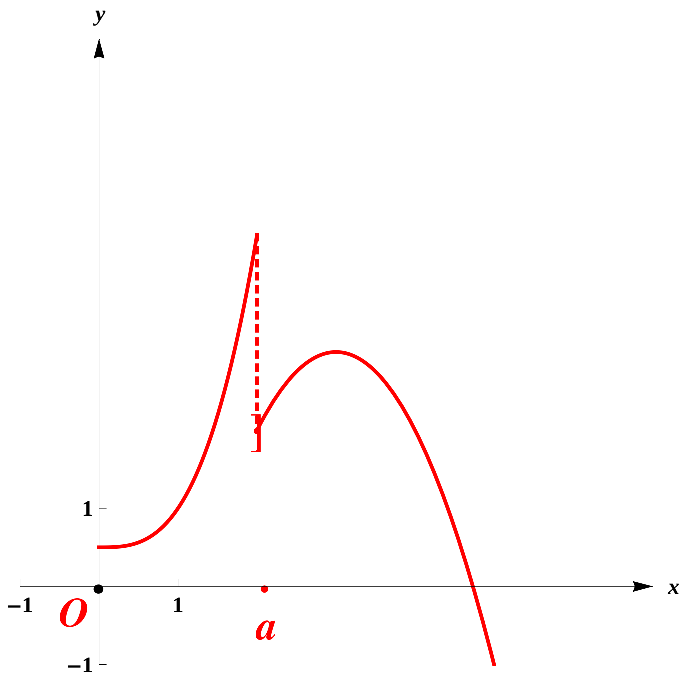


FIGURE 1.1 – Le graphe d'une fonction discontinue en un point a.

Remarque 1. Dire qu'une fonction est continue signifie, tout simplement, que sa courbe représentative ne présente pas de « sauts ». Une fonction continue en un point a admet une limite en a.

Définition 2. Continuité à gauche
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. La fonction f est dite ***continue à gauche en*** a si :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Définition 3. Continuité à droite
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. La fonction f est dite ***continue à droite en*** a si :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Remarque 2. lorsque l'on veut explicitement indiquer sur un graphe qu'une fonction est continue à gauche et non à droite au point a, on place un « point » sur la

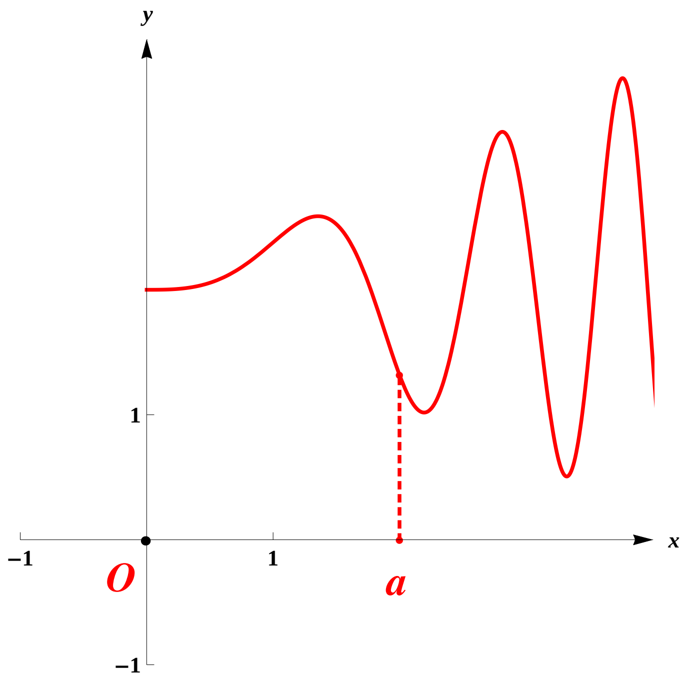


FIGURE 1.2 – Le graphe d'une fonction continue en un point a.

valeur « à gauche », et un crochet «] » sur la valeur « à droite ».
De même, lorsque l'on veut explicitement indiquer sur un graphe qu'une fonction est continue à droite et non à gauche au point a, on place un « point » sur la valeur « à droite », et un crochet « [» sur la valeur « à gauche ».

Exemple 1. Un exemple de fonction continue à droite en chaque entier, et discontinue à gauche en chaque entier : la fonction « partie entière »

La fonction « partie entière » d'un réel donné x est le plus grand entier n_x inférieur ou égal à x. Ainsi, la partie entière du nombre 2.3 est 2, celle du nombre 4.7 est 4, etc ... :

$$\forall\, x \geqslant 0 : \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

Par définition, la fonction « partie entière », notée E, est la fonction qui, à tout réel positif x, associe sa partie entière.

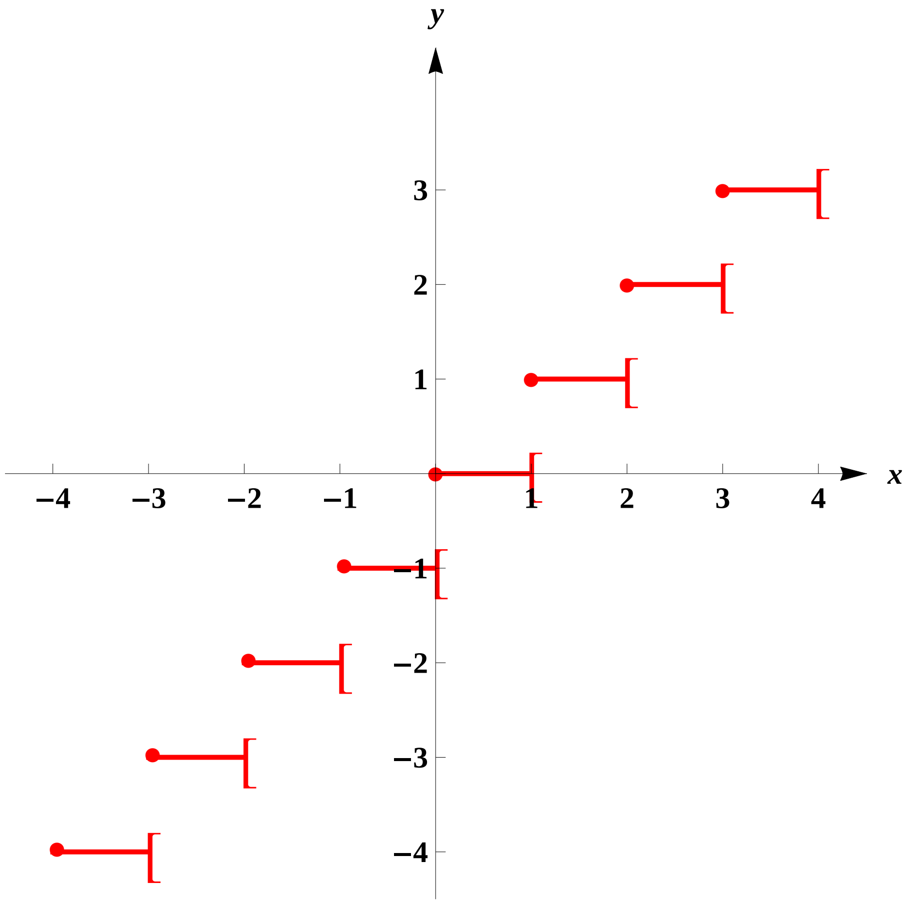


FIGURE 1.3 – La courbe représentative de la fonction « partie entière ».

Théorème 1. ***Prolongement par continuité en un point***

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un réel donné n'appartenant pas à $\mathcal{D}_f$.
On suppose que f admet une limite finie ℓ en a. Alors, la fonction $\tilde{f}$ définie pour tout x de $\mathcal{D}_f \cup \{a\}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ \ell & si \quad x = a \end{cases}$$

est continue en a, et constitue le prolongement par continuité de f en a.

Exemple 2. On considère la fonction qui, à tout réel x non nul, associe $x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^\star$, mais peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ par la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Théorème 2. ***Opérations algébriques sur les fonctions continues***
Soit f et g des fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un point de I. Alors :

i. si f et g sont continues en a, les fonctions $f+g$ et fg sont définies sur I et continues en a.

ii. Si $g(a) \neq 0$, et si g est continue en a, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est définie sur un intervalle de la forme $]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $\eta > 0$, et est continue en a.

Théorème 3. ***Continuité des fonctions composées***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ contenant $f(I)$: $f(I) \subset J$.
Si f est continue en un point a de I et si g est continue au point $f(a) \in f(I)$, la fonction composée $g \circ f$ est définie sur l'intervalle I et continue en a.

Théorème 4. ***Continuité des fonctions usuelles***

Les fonctions usuelles, i.e. :

i. la fonction identité $x \mapsto x$;
ii. la fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ *;*
iii. la fonction exponentielle,
iv. les fonctions sinus et cosinus,
v. les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique,

sont continues en tout point de leur domaine de définition.

Corollaire 1. *Les fonctions construites à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques et composition sont continues en tout point où elles sont définies.*

Remarque 3. Quelques conséquences simples :

i. Les fonctions polynômes, de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \in \mathbb{N}^\star$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

ii. Les fonctions « fractions rationnelles » $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (où P et Q sont des polynômes et Q n'est pas identiquement nul) sont continues en tout point où le polynôme Q ne s'annule pas.

iii. Les fonctions de la forme $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, sont continues en tout point où elles sont définies.

Chapitre 2

Fonctions continues sur un intervalle

On étend, ici, la notion de continuité en un point à un intervalle.

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I, soit, de façon formelle :

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Les théorèmes de continuité en un point se traduisent immédiatement en des théorèmes de continuité globale :

Théorème 5. ***Continuité et opérations algébriques***
Soient f et g des fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les fonctions $f+g$ et fg sont définies et continues sur I.
De plus, si la fonction g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est définie et continue sur I.

Théorème 6. ***Continuité des fonctions composées***
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie et continue sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ contenant $f(I)$.
La fonction composée $g \circ f$ est définie et continue sur l'intervalle I.

Théorème 7. ***Continuité des fonctions usuelles***

i. *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.*
ii. *La fonction logarithme népérien est continue sur $]0, +\infty[$.*
iii. *La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.*
iv. *Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.*

Corollaire 2. *Les fonctions construites à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques et composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies :*

i. *Les fonctions « fractions rationnelles », de la forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sont continues sur tout intervalle où le polynôme Q ne s'annule pas.*

ii. *La fonction tangente est continue sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \right[$, $k \in \mathbb{Z}$.*

iii. *Les fonctions $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, sont continues sur $]0, +\infty[$.*

Remarque 1. Ces théorèmes permettent souvent de conclure à la continuité d'une fonction sur son ensemble de définition, à l'exception éventuelle de quelques points pour lesquels on doit faire une étude directe locale. C'est systématiquement le cas des points de raccordement lorsque la fonction est définie par morceaux, ou quand la fonction a été obtenue en prolongeant par continuité une autre fonction a priori non définie en un point. Ainsi, la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 8. ***Théorème des valeurs intermédiaires***
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels de I. Alors, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par la fonction f.

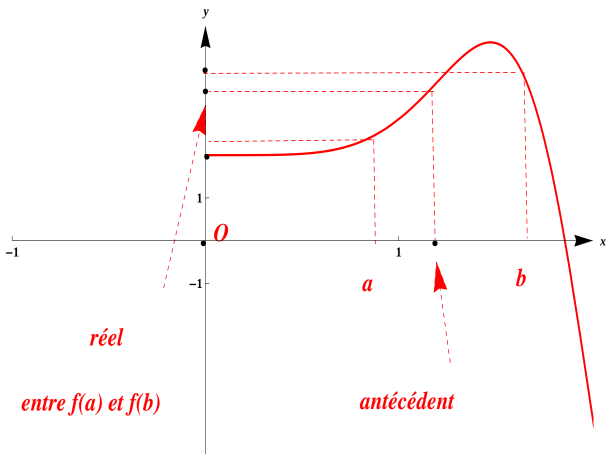


FIGURE 2.1 – Illustration graphique du théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque 2. On peut aussi énoncer ce théorème sous la forme suivante : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 9. ***Théorème de Weierstrass, ou des bornes atteintes***
Soit f une fonction définie et continue sur un segment I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels de I. Alors, f y est bornée et atteint ses bornes, ce qui signifie qu'il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de I :

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

et qu'il existe deux réels x_m et x_M de I tels que :

$$f(x_m) = m \quad , \quad f(x_M) = M$$

Remarque 3. Il résulte du théorème précédent que l'image d'un intervalle fermé et borné (i.e. un segment) par une fonction continue est un intervalle fermé et borné.

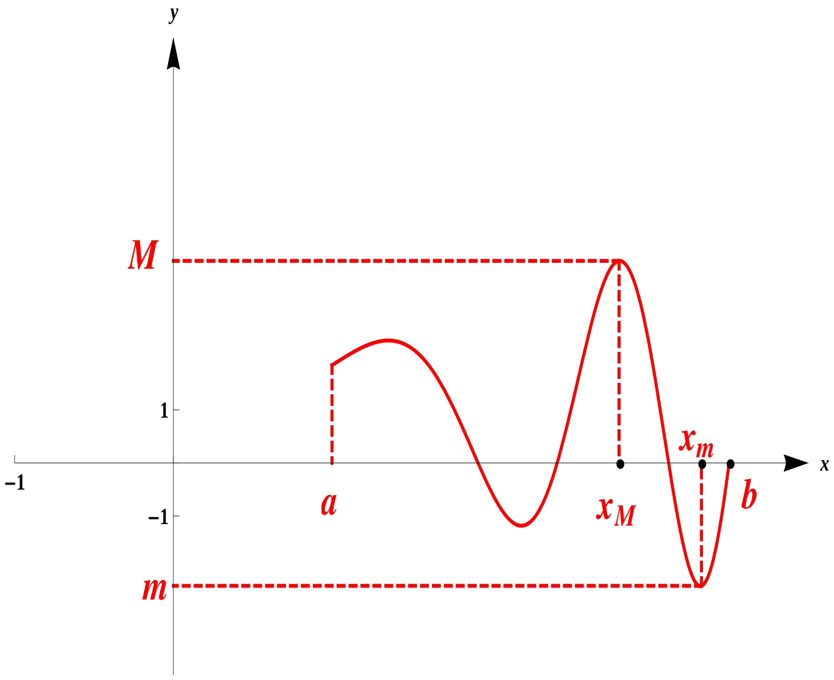


FIGURE 2.2 – Illustration graphique du théorème de Weierstrass.

Chapitre 3

Dérivabilité en un point

3.1 Définition

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. La fonction f est dite ***dérivable en*** a si la fonction τ, définie, pour tout x de $I \setminus \{a\}$, par

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite en a. Dans ces conditions, la limite de la fonction τ en a s'appelle ***dérivée de la fonction*** f ***en*** a, et se note $f'(a)$.

Remarque 1. **Interprétation graphique**

Etant donné deux réels distincts x_1 et x_2 de I, le quotient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est, tout simplement, le coefficient directeur de la corde joignant les points M_1 et M_2, de coordonnées respectives $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, si on se place dans un repère orthonormé direct. Etudier ce qui se passe lorsque $x_1 = a$ et x_2 tend vers x_1 revient donc à étudier la position limite de la sécante à la courbe en a :

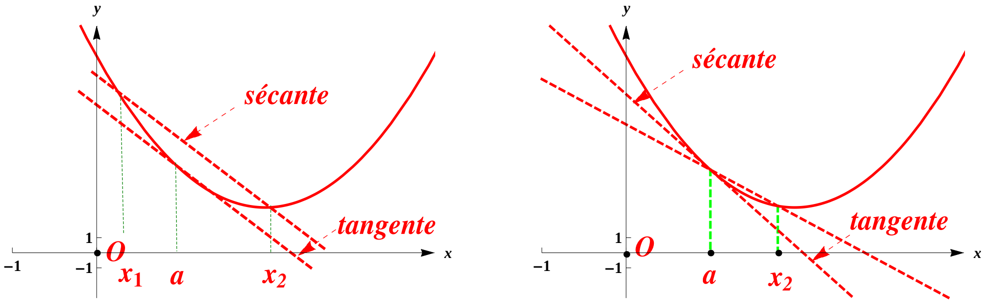


FIGURE 3.1 – La sécante, la position limite de la sécante, et la tangente.

La tangente à la courbe représentative de f en a ayant pour équation $y = (x-a)\,f'(a) + f(a)$, la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x-a)\,f'(a)+f(a)$ permet donc d'approximer f par une fonction affine au voisinage de a.

On peut, de façon équivalente, donner pour la dérivabilité la définition suivante :

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I.
La fonction f est dite ***dérivable en*** a s'il existe deux réels A et B tels que :

$$f(x) = A + B(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x-a)$$

où ε est une fonction de limite nulle en 0. On a alors :

$$A = f(a) \quad , \quad B = f'(a)$$

Remarque 2. La deuxième définition présente l'avantage de pouvoir être généralisée aux fonctions de plusieurs variables. Elle a aussi la conséquence immédiate suivante :

Propriété 1. Toute fonction f dérivable en un point a y est continue.

Remarque 3. La réciproque de cette proposition est FAUSSE !
Ainsi, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point.

Exemple 1. Une fonction continue partout, mais nulle part dérivable

Soit $a \in]0,1[$, et b est un réel tel que $a\,b > 1 + \dfrac{3\,\pi}{2}$. La fonction de Weierstrass

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos\left(b^n\,\pi\,x\right)$$

est continue partout, mais nulle part dérivable, ce qui signifie que sa courbe n'admet, nulle part, de tangente.

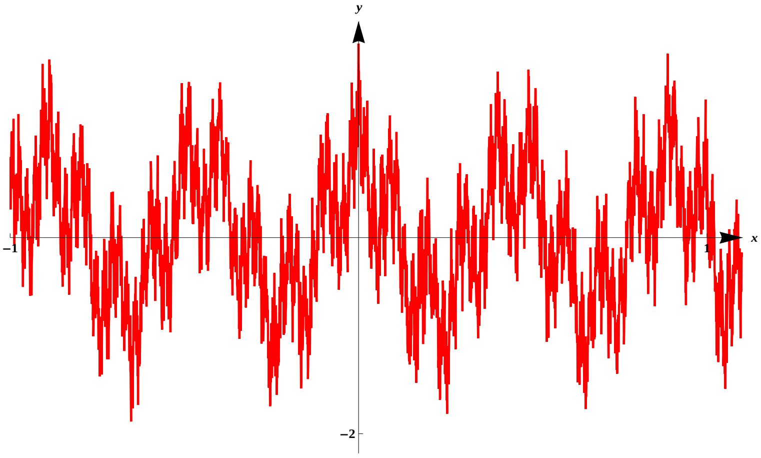


FIGURE 3.2 – La courbe représentative de la fonction de Weierstrass, pour $a = \dfrac{7}{10}$, et $b = 10$.

Les sismogrammes constituent, par exemple, des exemples de courbes continues, mais n'admettant nulle part de tangente.

3.2 Opérations algébriques et composition

Théorème 10. ***Dérivabilité en un point et opérations algébriques***

Soient f et g des fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un point de I. Alors :

i. Si f et g sont dérivables en a, les fonctions $f+g$ et fg sont dérivables en a, et :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad , \quad (fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$$

ii. Si $g(a) \neq 0$, et si g est dérivable en a, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est définie sur un intervalle de la forme $]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $0 < \eta$, et est dérivable en a. De plus :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Théorème 11. ***Dérivabilité des fonctions composées***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$.
Si f est dérivable en un point a de I, et si g est dérivable au point $f(a)$, alors la fonction composée gof est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a))$$

Démonstration. Posons $b = f(a)$. La dérivabilité de la fonction f en a s'écrit :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\,\varepsilon_1(x-a)$$

où ε_1 est une fonction de limite nulle en 0.
La dérivabilité de la fonction g en b s'écrit :

$$g(x) = g(b) + (x-b)\,g'(b) + (x-b)\,\varepsilon_2(x-b)$$

où ε_2 est une fonction de limite nulle en 0.
En remplaçant x par $f(x)$ dans la deuxième formule, on obtient :

$$g(f(x)) = g(b) + ((x-a)\,f'(a) + (x-a)\,\varepsilon_1(x-a))g'(b) + ((x-a)\,f'(a) + (x-a)\,\varepsilon_1(x-a))\;\varepsilon_2(f(x)-b)$$

On remarque alors que, f étant continue en a, on peut écrire :

$$f(x) - b = f(x) - f(a) = \varepsilon_3(x-a)$$

où ε_3 est une fonction de limite nulle en 0.
Par suite :

$$\varepsilon_2\,(f(x) - b) = \varepsilon(x-a)$$

où, pour alléger les écritures, et, de façon générique, on décide de désigner par $\varepsilon(.) : x \mapsto \varepsilon(x)$ n'importe quelle fonction de limite nulle en 0.
Finalement, en regroupant les termes qui contiennent à la fois un facteur $(x-a)$ et un facteur $\varepsilon(x-a)$, on obtient :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(b) + (x - a) f'(a)g'(b) + (x - a)\varepsilon(x - a)$$

ce qui montre que la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et que :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a))$$

□

Chapitre 4

Dérivabilité sur un intervalle

4.1 Généralités

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On appelle ***fonction dérivée*** de f la fonction f' définie sur I et qui, à chaque point a de l'intervalle I, associe $f'(a)$.

Théorème 12. ***Dérivabilité et opérations algébriques***

Soient f et g des fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

i. Si f et g sont dérivables sur I, les fonctions $f+g$ et fg sont dérivables sur I, et, pour tout x de I :

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad , \quad (fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

ii. Si g ne s'annule pas sur I, et si g est dérivable sur I, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I. De plus, pour tout x de I :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Théorème 13. ***Dérivabilité des fonctions composées***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$.

Si f est dérivable sur I, et si g est dérivable sur J, alors la fonction composée gof est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x))$$

Exemple 1. On considère la fonction f qui, à tout réel x, associe $\cos(x^2)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x :

$$f'(x) = -2\, x\, \sin(x^2)$$

Remarque 1. Le théorème de dérivabilité des fonctions composées peut être considéré comme l'un des plus importants du calcul des dérivées. Une application est de l'utiliser pour obtenir la dérivée d'un quotient de fonctions, ou, encore, pour obtenir celle d'un produit ; à cet effet, il suffit de considérer deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, compte tenu de l'identité :

$$(f+g)^2 = f^2 + 2\, f\, g + g^2$$

on obtient, à l'aide de la formule donnant la dérivée d'une fonction composée :

$$2\,(f+g)\,(f'+g') = 2\, f\, f' + f'\, g + f\, g' + 2\, g\, g'$$

ce qui conduit donc à :

$$(f\, g)' = f'\, g + f\, g'$$

Théorème 14. *Toute fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ y est continue.*

Définition 2. Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continue sur I. On dit que F est une ***primitive*** de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout réel x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque 2. **Attention !**

Une fonction continue sur un intervalle I y admet une infinité de primitives !

Exemple 2. La fonction qui, à tout réel x, associe x^2, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui, à tout réel x, associe $2\,x$. Mais la fonction qui, à tout réel x, associe x^2+1, est AUSSI une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui, à tout réel x, associe $2\,x$.

4.2 Dérivabilité des fonctions définies par morceaux

Pour pouvoir étudier la dérivabilité en un point de raccordement des fonctions définies par morceaux, il est nécessaire d'introduire les notions de dérivée à droite et à gauche.

Définition 3. Dérivée à droite d'une fonction
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et a un point de I. La fonction f est dite ***dérivable à droite*** en a si la fonction τ, définie, pour tout x de $I \setminus \{a\}$, par

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a une limite à droite en a, i.e. lorsque x tend vers a par valeurs supérieures.
Cette limite est appelée dérivée à droite de la fonction f en a, et notée $f'_d(a)$.

Définition 4. Demi-tangente à droite
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et a un point de I. On suppose que la fonction f est dérivable à droite en a. La demi-droite d'équation

$$y = f(a) + (x-a)\, f'_d(a) \quad \text{pour } x \geqslant a$$

est la ***demi-tangente à droite en*** a de la courbe représentative de f.

Définition 5. Dérivée à gauche d'une fonction
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et a un point de I. La fonction f est dite ***dérivable à gauche*** en a si la fonction τ, définie pour tout x de $I \setminus \{a\}$, par

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a une limite à gauche en a, i.e. lorsque x tend vers a par valeurs inférieures.
Cette limite est appelée dérivée à gauche de la fonction f en a, et notée $f'_g(a)$.

Définition 6. Demi-tangente à gauche
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et a un point de I. On suppose que la fonction f est dérivable à gauche en a. La demi-droite d'équation

$$y = f(a) + (x-a)\, f'_g(a) \quad \text{pour } x \leqslant a$$

est la ***demi-tangente à gauche en*** a de la courbe représentative de f.

Propriété 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et a un point de I.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a, et si ses dérivées à gauche et à droite en a sont égales.

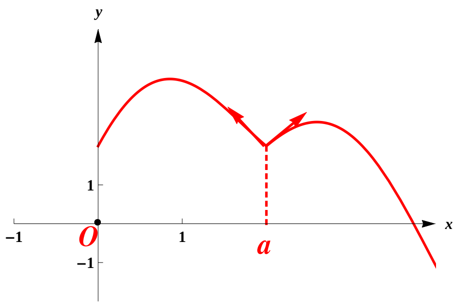


Figure 4.1 – Le graphe d'une fonction non dérivable en a : les deux dérivées à gauche et à droite ne sont pas égales. Il y a une demi-tangente à gauche, et une demi-tangente à droite. La courbe possède un point anguleux.

Exemple 3. La fonction valeur absolue, qui, à tout réel x, associe sa valeur absolue $|x|$, n'est pas dérivable en zéro, mais possède des dérivées à droite et à gauche en zéro.

4.3 Dérivabilité et variations

Théorème 15. ***Caractérisation des fonctions constantes dérivables***
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction dérivable sur I. Alors, f est constante sur I si et seulement si sa dérivée f' est identiquement nulle sur I :

$$\forall x \in I \; : \; f'(x) = 0$$

Théorème 16. ***Caractérisation des fonctions croissantes dérivables***
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction dérivable sur I. Alors, f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I :

$$\forall x \in I \; : \; f'(x) \geqslant 0$$

Théorème 17. ***Caractérisation des fonctions décroissantes dérivables***
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction dérivable sur I. Alors, f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I :

$$\forall x \in I \; : \; f'(x) \leqslant 0$$

Théorème 18. ***Caractérisation des fonctions strictement croissantes dérivables***
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction dérivable sur I. Alors, f est strictement croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I, et ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.

Théorème 19. ***Caractérisation des fonctions strictement décroissantes dérivables***
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction dérivable sur I. Alors, f est strictement décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I, et ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.

4.4 Dérivées successives

Définition 1. Dérivée $n^{ème}$
Etant donné un entier naturel non nul n, on définit, sous réserve d'existence bien sûr (i.e. lorsque cela est possible), la dérivée $n^{ème}$ de f, notée $f^{(n)}$, par récurrence :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

avec la convention :

$$f^{(0)} = f$$

Définition 2. Fonction n fois dérivable, $n \in \mathbb{N}$
Si f admet une dérivée $n^{ème}$, $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est n fois dérivable sur I.

Définition 3. Fonction indéfiniment dérivable
Si, pour tout entier naturel n, f admet une dérivée $n^{ème}$ on dit que f est indéfiniment dérivable sur I.

Exemple 4. Les fonctions polynômes, les fonctions trigomométriques *sinus* et *cosinus*, la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$, sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5. Les fractions rationnelles sont indéfiniment dérivables sur tout intervalle qui ne contient pas de racine du dénominateur.

Exemple 6. La fonction *logarithme népérien* $x \mapsto \ln x$ et la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sont indéfiniment dérivables sur $]0, \infty[$.

Définition 4. Fonction de classe C^n, $n \in \mathbb{N}$
Soit n un entier naturel, et f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I, et si sa dérivée $n^{ème}$, $f^{(n)}$, est continue sur I.

Définition 5. Fonction de classe C^∞
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est ***de classe C^∞ sur I*** si, pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur I.

Théorème 20. ***Dérivée*** $n^{\text{ème}}$ ***d'une combinaison linéaire de fonctions,*** $n \in \mathbb{N}$

Soient f et g des fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, et n un entier naturel. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I. Alors, toute combinaison linéaire de f et g est n fois dérivable sur I ; pour tout couple (α, β) de réels, $\alpha\, f + \beta\, g$ est n fois dérivable sur I et :

$$(\alpha\, f + \beta\, g)^{(n)} = \alpha\, f^{(n)} + \beta\, g^{(n)}$$

Théorème 21. ***Formule de Leibniz***[1]

Soient f et g des fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, et n un entier naturel. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I. Alors, la fonction produit $f\, g$ est n fois dérivable sur I, et :

$$(f\, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)}\, g^{(n-k)}$$

où, pour tout entier k de $\{0, \ldots, n\}$, C_n^k désigne le coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$$

Par convention, ce coefficient est nul si $k > n$.

Démonstration. On ne donne, ici, que des éléments de preuve. Ce résultat se démontre par récurrence, à l'aide de la formule donnée par le triangle de Pascal ; étant donné un entier naturel non nul n, alors, pour tout entier naturel $k \leqslant n - 1$:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

soit :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

□

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), philosophe, mathématicien, juriste et philologue allemand. Il apporta des contributions fondamentales en calcul différentiel et intégral. Il fut, également, l'inventeur d'une des premières machines à calculer. Ses œuvres philosophiques sont, elles aussi, de première importance.

Théorème 22. ***Dérivée*** $n^{ème}$ ***d'un quotient de fonctions,*** $n \in \mathbb{N}$

Soient f *et* g *des fonctions définies sur un même intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, et* n *un entier naturel. On suppose que* f *et* g *sont* n *fois dérivables sur* I*, et que* g *ne s'annule pas sur* I*. Alors, le quotient* $\frac{f}{g}$ *est* n *fois dérivable sur* I*.*

Théorème 23. ***Dérivée*** $n^{ème}$ ***de la composée de deux fonctions,*** $n \in \mathbb{N}$
Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, et* g *une fonction définie sur un intervalle* J *contenant* $f(I)$*.*
Si f *est* n *fois dérivable sur* I*, et* g *est* n *fois dérivable sur* J*, alors la fonction composée* gof *est* n *fois dérivable sur* I*.*

Remarque 3. Il existe une formule permettant de calculer la dérivée $n^{ème}$ d'une fonction composée. Cette formule est due à Faà di Bruno [2] :

$$(g \circ f)^{(n)} = n\,! \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{g^{(k)} \circ f}{k\,!} \prod_{n_1 + \ldots + n_k = n,\, n_j \geqslant 1} \frac{f^{(n_j)}}{n_j\,!}$$

Le lecteur intéressé pourra trouver plus de précisions dans [4], page 165.

4.5 En ce qui concerne les différentes notations

4.5.1 Notation de Lagrange

La dérivée d'une fonction f, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est notée f'.

4.5.2 Notation de Leibniz

Etant donnée une fonction x, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, l'expression, au point t de I de sa dérivée, est notée

$$\frac{dx}{dt}$$

2. Francesco Faà di Bruno (1825-1888), prêtre et religieux italien, en même temps que mathématicien renommé, et musicien de talent. Il fut l'élève d'Augustin Cauchy à la Sorbonne. Il a été béatifié en 1988.

L'intérêt de cette notation est de pouvoir exprimer la dérivée au point t comme le rapport des accroissements infinitésimaux $dx = x(t + dt) - x(t)$ et dt. En un point particulier t_0, la dérivée se note

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}$$

Elle permet, aussi, de lever l'ambiguïté sur la variable considérée.

4.5.3 Notation de Newton

Cette notation est exclusivement réservée à la dérivée par rapport à la variable temporelle. Etant donnée une fonction v, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, l'expression, au point t de I de sa dérivée, est notée

$$\dot{v}(t)$$

En mathématiques, la notation la plus fréquemment employée est celle de Lagrange, qui est bien adaptée à la manipulation des fonctions. En physique, en chimie, géosciences, et en ingénierie, on préfère les notations de Leibniz et de Newton, en raison de leur référence explicite aux grandeurs en jeu.

Une fonction dérivable, présentant un extrémum en un point de son domaine de définition, possède, en ce point, une dérivée nulle. En pratique, cette remarque permet de trouver l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction dérivable. Plus fondamentalement, elle est le point clef de la démonstration du théorème de Rolle et de ses conséquences : le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor-Lagrange. [3] [4]

4.6 Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle

Définition 6. Maximum d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et c un point de I. La fonction f admet un ***maximum*** en c si, pour tout x de I :

$$f(x) \leqslant f(c)$$

Définition 7. Minimum d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et c un point de I. La fonction f admet un ***minimum*** en c si, pour tout x de I :

$$f(x) \geqslant f(c)$$

Définition 8. Extremum d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et c un point de I. La fonction f admet un ***extremum*** en c si elle admet en c un maximum ou un minimum.

3. Brook Taylor (1685-1731), mathématicien, historien des sciences, musicien et peintre anglais. C'est lui qui découvrit l'intégration par parties, et est, bien sûr, à l'origine des « développements de Taylor ».

4. Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813), mathématicien, mécanicien et astronome italien. Il fut l'initiateur du calcul variationnel. En parallèle, il apporta de nombreuses contributions en algèbre, à la théorie des nombres, au calcul infinitésimal, aux probabilités, mais aussi à la mécanique.

Définition 9. Maximum local d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et c un point de I. La fonction f admet un ***maximum local*** en c si il existe un intervalle ouvert de la forme $]c-\eta, c+\eta[\subset I$, $0<\eta$, tel que la restriction de f à cet intervalle admette un maximum en c.

$$\forall\, x\ \in]c-\eta, c+\eta[:\ f(x) \leqslant f(c)$$

Définition 10. Minimum local d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et c un point de I. La fonction f admet un ***minimum local*** en c si il existe un intervalle ouvert de la forme $]c-\eta, c+\eta[\subset I$, $0<\eta$, tel que la restriction de f à cet intervalle admette un minimum en c :

$$\forall\, x\ \in]c-\eta, c+\eta[:\ f(x) \geqslant f(c)$$

Définition 11. Extremum local d'une fonction
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et c un point de I. La fonction f admet un ***extremum local*** en c si elle admet en c un minimum local, ou un maximum local.

Proposition 1. Dérivée et extremum local
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et c un point intérieur à I (i.e. qui ne soit pas une borne de I). Si f est dérivable en c et admet en c un extremum local, alors :

$$f'(c) = 0$$

Remarque 4. **Interprétation graphique**

le graphe d'une fonction admettant des extremums locaux aura donc, en ces points, des tangentes horizontales.

Démonstration. Le fait que f possède une dérivée nulle au point c est une *propriété locale* (elle ne dépend que des valeurs de f au voisinage du point c).
Quitte à considérer la restriction de f à un sous-intervalle ouvert de I, de la forme $]c-\eta, c+\eta[$, $0<\eta<c$, on peut supposer que f possède un extremum en c.

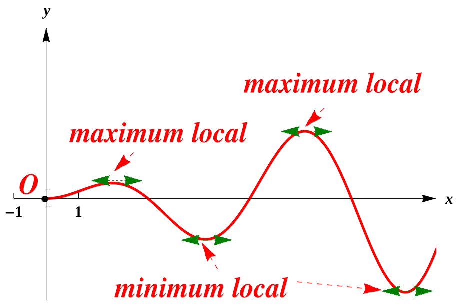


FIGURE 4.2 – Le graphe d'une fonction avec des extremums locaux.

Supposons, dans un premier temps, que f possède un maximum en c. Alors, pour x de I tel que $x < c$: $f(x) \leqslant f(c)$. Il en résulte :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

et donc :

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

De même, pour tout x de I tel que $x > c$: $f(x) \leqslant f(c)$. Il en résulte :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

et donc :

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

D'où, nécessairement : $f'(c) = 0$.
Le cas où f possède un minimum en c se traite de façon analogue (il suffit de changer f en $-f$).

$\square$

Remarque 5. On voit bien dans cette démonstration l'importance de supposer que c soit intérieur à I ; ainsi, le point c n'est pas une extrémité de l'intervalle I et les limites à gauche et à droite utilisées dans la démonstration ont un sens.
Si on considère la restriction de l'application identité à l'intervalle $[0, 1]$, cette restriction présente un extremum en 1, alors que la dérivée de la fonction ne s'annule pas en 1.

Remarque 6. **Attention !**
La réciproque de la proposition précédente est fausse : une fonction dérivable sur un intervalle peut avoir une dérivée nulle en un point qui n'est pas un extremum local. C'est le cas, par exemple, de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$, au point 0.

Remarque 7. **Une application pratique**
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. Si cette fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ alors son maximum M et son minimum m sont à rechercher parmi les valeurs de la fonction f en a, ou en b, ou aux points c où sa dérivée f' s'annule.

Théorème 24. ***Théorème de Rolle*** [5]
Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors, si $f(a) = f(b)$, il existe un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0$$

Remarque 8. **Interprétation graphique du théorème de Rolle**

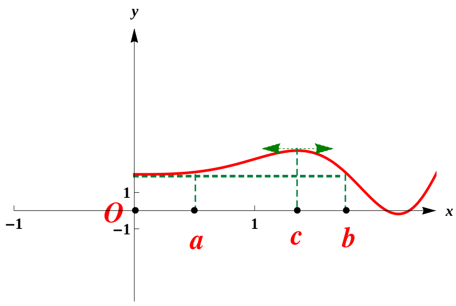


FIGURE 4.3 – Illustration graphique du théorème de Rolle.

Démonstration. Il faut montrer que la fonction f admet un extremum en un point de l'intervalle $]a, b[$.

5. Ce théorème doit son nom au mathématicien français Michel Rolle (1652-1719), qui fut le premier à établir ce résultat, dans le cas de fonctions polynomiales. Ses contributions portent et sur l'algèbre, et sur l'analyse. Il est à l'origine de la notation $\sqrt[n]{x}$, pour désigner la racine $n^{ème}$ d'un réel positif x.

Comme f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, l'image $f([a, b])$ de $[a, b]$, est un intervalle fermé borné, de la forme $[m, M]$, $(m, M) \in \mathbb{R}^2$, $m \leqslant M$.

On distingue deux cas :

i. si la fonction f est constante sur l'intervalle $[a, b]$, alors sa dérivée f' est identiquement nulle sur cet intervalle. N'importe quel point c de l'intervalle $]a, b[$ convient, puisqu'il vérifie $f'(c) = 0$.

ii. Si la fonction f n'est pas constante, l'intervalle $[m, M]$ n'est pas réduit à un point. Donc l'une, au moins, des deux inégalités strictes : $M > f(a) = f(b)$, ou $m < f(a) = f(b)$ est vérifiée.

On supposera, dans ce qui suit : $M > f(a)$ (le cas $m < f(a)$ se traite de manière analogue).
Comme M est un point de $[m, M]$, il existe un point c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = M$. Comme $M > f(a)$ et $M > f(b)$, c appartient en fait à l'intervalle $]a, b[$. La fonction f admet en c un maximum, étant dérivable sur $]a, b[$, donc en c, elle vérifie donc : $f'(c) = 0$.

$\square$

Théorème 25. ***Théorème des accroissements finis***
Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors, il existe un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

Remarque 9. **Interprétation graphique du théorème des accroissements finis**

Le théorème des accroissements finis traduit, tout simplement, le fait que la courbe représentative de f possède, en c, une tangente parallèle à la corde joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$:

Démonstration. On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

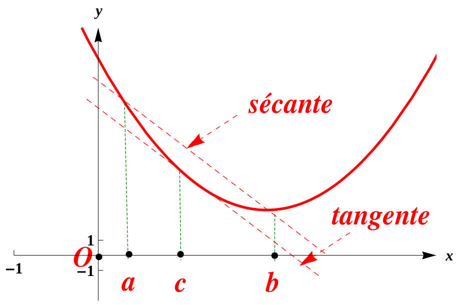


FIGURE 4.4 – Une illustration graphique du théorème des accroissements finis.

Elle est, comme la fonction f, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Par ailleurs elle vérifie : $\varphi(a) = \varphi(b)$. Elle satisfait donc aux hypothèses du théorème de Rolle. Ainsi, il existe c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui achève la démonstration.

□

Remarque 10. Le théorème des accroissements permet de relier les variations d'une fonction au signe de sa dérivée.

4.7 Formule de Taylor Lagrange

On présente, dans ce qui suit, la formule de Taylor-Lagrange, qui généralise la formule des accroissements finis pour les fonctions plusieurs fois dérivables.

Théorème 26. ***Formule de Taylor-Lagrange***

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que :

i. la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$;

ii. la dérivée $n^{ème}$ de f, $f^{(n)}$, est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Alors, il existe un réel c, appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$, tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \frac{f''(a)}{2}\,(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}\,(b-a)^{n+1}$$

Démonstration. Soit A le réel défini par :

$$\frac{A}{(n+1)\,!}\,(b-a)^{n+1} = f(b) - f(a) - (b-a)\,f'(a) - \frac{f''(a)}{2}\,(b-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(b-a)^n$$

Il s'agit de montrer qu'il existe un réel c, appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$, tel que

$$A = f^{(n+1)}(c)$$

On introduit, à cet effet, la fonction φ définie, pour tout x de $[a, b]$, par :

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2}\,(b-x)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}(b-x)^n - \frac{A}{(n+1)\,!}\,(b-x)^{n+1}$$

Il est évident que

$$\varphi(b) = 0$$

Le choix du nombre A conduit à :

$$\varphi(a) = 0$$

Par ailleurs, la fonction φ est, comme la fonction f et chacune de ses n premières dérivées, continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.
La fonction φ satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle.
Il existe donc un nombre c, appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$, tel que :

$$\varphi'(c) = 0$$

Un calcul facile montre que :

$$\varphi'(x) = \frac{A - f^{(n+1)}(x)}{n\,!}\,(b-x)^n$$

Comme le nombre c est différent de b, on peut en déduire que :

$$A = f^{(n+1)}(c)$$

□

Chapitre 5

Convexité

La notion de convexité correspond à une réalité physique ; ainsi, en optique, une lentille dite « convexe » est un verre « bombé vers l'extérieur ». Lorsqu'on la pose sur une table, sa forme « bombée »fait que, quelque soit sa position, la table reste toujours tangente au verre. de façon équivalente, en mathématiques, la première caractérisation de la convexité, qui s'applique à des courbes, est liée au fait que le barycentre d'un système de points situés sur la courbe doit se trouver au-dessus de celle-ci (les fameuses « inégalités de convexité »), ou encore, que la courbe est située au-dessous de toutes ses cordes.

Définition 1. Fonction convexe
Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dite ***convexe*** si, pour tout couple (a, b) d'éléments de I^2, et tout réel t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$f\,(t\,a + (1-t)\,b) \leqslant t\,f(a) + (1-t)\,f(b)$$

Remarque 1. Cette définition traduit, tout simplement, le fait que tout point situé sur une corde joignant deux points de la courbe, de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, $(a, b) \in I^2$, est au-dessus de la courbe. Ce point étant sur la corde, son abscisse est de la forme $t\,a + (1-t)\,b$, $t \in [0, 1]$, et son ordonnée de la forme $t\,f(a) + (1-t)\,f(b)$, qui est donc plus grande que celle du point de la courbe d'abscisse $t\,a + (1-t)\,b$, i.e. $f\,(t\,a + (1-t)\,b)$.

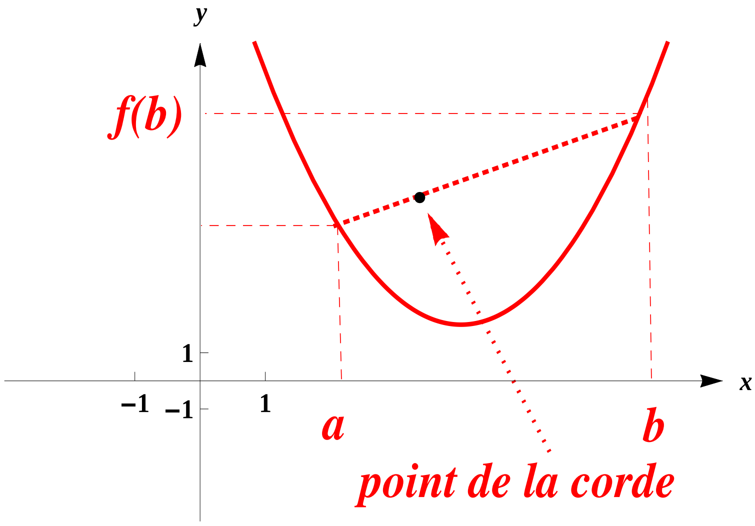


FIGURE 5.1 – Le graphe d'une fonction convexe.

Définition 2. Fonction concave
Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dite ***concave*** si, pour tout couple (a, b) d'éléments de I^2, et tout réel t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$f\,(t\,a + (1-t)\,b) \geqslant t\,f(a) + (1-t)\,f(b)$$

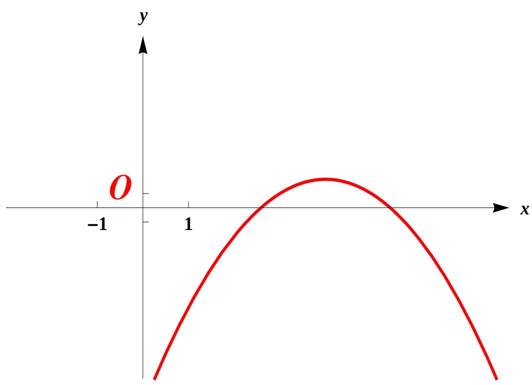


FIGURE 5.2 – Le graphe d'une fonction concave.

Remarque 2.
Dire qu'une fonction f est concave revient donc à dire que son opposée $-f$ est convexe.

Théorème 27. ***Position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses cordes***
Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est convexe si et seulement si sa courbe représentative est située en-dessous de toutes les cordes joignant deux points de cette courbe.

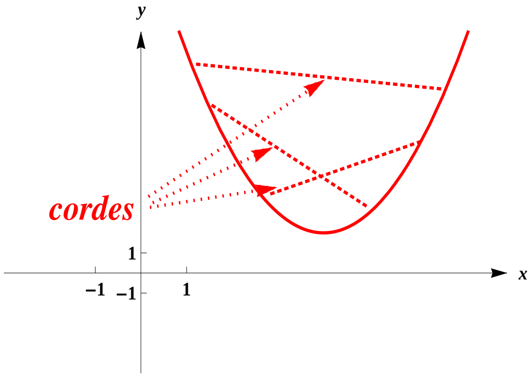


FIGURE 5.3 – Illustration graphique de la position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses cordes.

Théorème 28. ***Inégalité de convexité (ou inégalité de Jensen[1])***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, et t_1, ..., t_n, n réels positifs dont la somme vaut 1 : $t_1 + \ldots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Alors, pour tout $n-$uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de I^n :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\, x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i\, f(x_i)$$

Remarque 3. Cette définition traduit, tout simplement, le fait que tout barycentre d'un ensemble de points situés sur la courbe, de coordonnées respectives $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$, $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, est au-dessus de la courbe. L'abscisse de ce point est donc de la forme $\sum_{i=1}^{n} t_i\, x_i$, où t_1, ..., t_n, sont n réels positifs dont la somme vaut 1, et son ordonnée de la forme $\sum_{i=1}^{n} t_i\, f(x_i)$, qui est donc plus grande que celle du point de la courbe d'abscisse $\sum_{i=1}^{n} t_i\, x_i$, i.e. $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\, f(x_i)\right)$.

1. Mathématicien danois, 1859-1925.

Théorème 29. ***Régularité d'une fonction convexe***
Une fonction f, définie sur un intervalle **ouvert** *I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue, et admet, en tout point de I, une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

Remarque 4. **Attention !**

L'hypothèse selon laquelle l'intervalle I doit être OUVERT est essentielle !

Théorème 30. ***Inégalité des pentes croissantes***
Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, est convexe si et seulement si, pour tout réel a de I, la fonction qui, à tout x de I, distinct de a, associe le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante, ce qui est équivalent à dire que, pour tout triplet de réels (a,b,c) de I tel que $a<b<c$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Remarque 5. Ce théorème traduit, tout simplement, le fait que la pente, ou coefficient directeur, de la droite joignant les points de coordonnées $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$, est plus petite que la pente de la droite joignant les points de coordonnées $(a,f(a))$ et $(c,f(c))$, qui est elle-même plus petite que la pente de la droite joignant les points de coordonnées $(b,f(b))$ et $(c,f(c))$, comme illustré sur le dessin suivant :

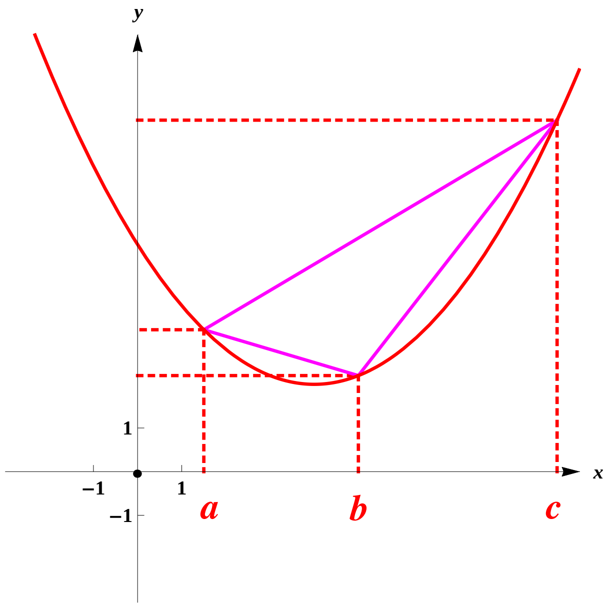


FIGURE 5.4 – Illustration graphique de l'inégalité des pentes croissantes.

Théorème 31. ***Position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes***
Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, est convexe si et seulement si sa courbe représentative est située au-dessus de toutes ses tangentes.

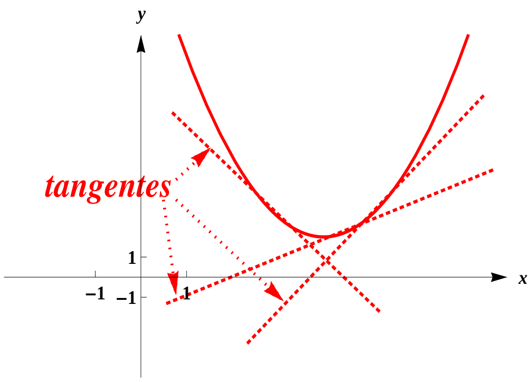


FIGURE 5.5 – Illustration graphique de la position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes.

Théorème 32. ***Convexité et dérivabilité***
Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, est convexe si et seulement si sa dérivée f' est croissante.

Corollaire 3. ***Cas des fonctions deux fois dérivables***
Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur I, est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives, i.e. si et seulement si, pour tout réel x de I :

$$f''(x) \geqslant 0$$

Deuxième partie

Equations différentielles linéaires du premier et du second ordre

Préambule

Les équations différentielles rencontrées en physique, en chimie, en géosciences et en ingénierie sont toujours d'ordre un ou deux. Elles sont, la plupart du temps, linéaires, soit parce que la théorie sous-jacente l'est (électromagnétisme, électrocinétique des composants linéaires, mécanique quantique), soit parce que ses équations ont été linéarisées (ce qui est la cas, notamment, pour les oscillations mécaniques autour d'un point d'équilibre stable).

En ce qui concerne les équations différentielles d'ordre 2, elles sont, pour les systèmes étudiés en physique, chimie, géosciences, ingénierie, à coefficients constants, car correspondant à des systèmes invariants dans le temps.

Chapitre 6

Equations différentielles linéaires du premier ordre

6.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre homogènes

Définition 1. Equation différentielle linéaire du premier ordre homogène

Soit a une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue.
On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre homogène*** une équation de la forme

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \quad \forall\, x \in I$$

où y est une fonction dérivable sur I. On peut aussi écrire, pour alléger les notations :

$$y' = a(x)\, y$$

Remarque 1. **Méthode pratique de résolution**

Soit a une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue.
On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène, que l'on désignera, dans ce qui suit, par $(\mathcal{E}_0)$:

$$y' = a(x)\, y$$

La fonction identiquement nulle sur l'intervalle I est solution de $(\mathcal{E}_0)$.
Considérons une solution y de $(\mathcal{E}_0)$, définie sur un intervalle $J \subset I$, non identique-

ment nulle. On suppose que y ne s'annule pas sur J. Quitte à changer y en $-y$, on supposera que y est à valeurs strictement positives.
On peut alors écrire :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

La fonction qui, à tout x de J, associe $\dfrac{y'(x)}{y(x)}$, est la dérivée de la fonction qui, à tout x de J, associe $\ln|y(x)| = \ln(y(x))$.
Ainsi, si on arrive à trouver une fonction $\mathcal{F}_a$ dont a soit la dérivée sur J (i.e. $\mathcal{F}'_a = a$), on aura, à une constante réelle C près :

$$\ln|y(x)| = \mathcal{F}_a(x) + C \quad \forall\, x \in J$$

(la dérivée de la fonction constante qui, à tout x de J, associe C, est la fonction identiquement nulle).
On en déduit alors, pour tout x de J :

$$y(x) = e^{\mathcal{F}_a(x)+C} = e^C\, e^{\mathcal{F}_a(x)}$$

On vérifie que, réciproquement, toute fonction de la forme $x \in J \mapsto e^C\, e^{\mathcal{F}_a(x)}$ est solution de $(\mathcal{E}_0)$.
On peut écrire que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale est

$$\left\{x \in J \mapsto e^C\, e^{\mathcal{F}_a(x)},\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Théorème 33. ***Solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène***

Soit a une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue. Les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \quad \forall\, x \in I$$

sont les fonctions de la forme

$$x \in I \mapsto K\, e^{\mathcal{F}_a(x)}$$

où K est une constante réelle, et $\mathcal{F}_a$ une fonction telle que, pour tout x de I :

$$\mathcal{F}'_a(x) = a(x)$$

De façon équivalente, on peut écrire que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale est

$$\left\{x \in I \mapsto K\, e^{\mathcal{F}_a(x)},\, K \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle

$$y'(x) = 2\,x\,y(x)$$

On recherche les solutions y qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel x :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2\,x$$

La fonction qui, à tout réel x, associe $2\,x$, est la dérivée de la fonction qui, à tout réel x, associe x^2.

On en déduit, pour tout réel x :

$$\ln|y(x)| = x^2 + C$$

où C est une constante réelle ; puis :

$$y(x) = e^{x^2+C} = e^C\, e^{x^2}$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$y(x) = K\, e^{x^2}$$

où K est une constante réelle positive (cela revient juste à appeler autrement e^C, qui est aussi une constante).

On vérifie que, réciproquement, toute fonction de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto K\, e^{x^2}$, $K \in \mathbb{R}$, est solution de $y'(x) = 2\,x\,y(x)$.

De façon équivalente, on peut écrire que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale est

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mapsto K\, e^{x^2},\, K \in \mathbb{R}\right\}$$

Définition 2. Condition initiale (pour une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène)

Soit a une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, x_0 un réel de I, et y_0 un réel.
On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre homogène***, avec la ***condition initiale*** $y(x_0) = y_0$, la donnée de l'équation différentielle

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \quad \forall\, x \,\in\, I$$

avec la condition

$$y(x_0) = y_0$$

Théorème 34. ***Solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène avec une condition initiale***

Soit a une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, x_0 un réel de I, et y_0 un réel.
L'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \quad \forall\, x \,\in\, I$$

avec la condition initiale

$$y(x_0) = y_0$$

admet pour unique solution la fonction

$$x \,\in\, I \mapsto y_0\, e^{-\mathcal{F}_a(x_0)}\, e^{\mathcal{F}_a(x)}$$

où $\mathcal{F}_a$ est une fonction telle que, pour tout x de I :

$$\mathcal{F}_a'(x) = a(x)$$

(on admet l'existence d'une telle fonction).

6.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre

Définition 3. Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Soient a et b deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues.
On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre*** une équation de la forme

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) \quad \forall\, x \in I$$

que l'on peut aussi écrire, pour alléger les notations :

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

Définition 4. Equation homogène associée à une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Soient a et b deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues.
On appelle ***équation homogène*** associée à l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre $y = a(x)\, y + b(x)$ l'équation

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \quad \forall\, x \in I$$

Théorème 35. ***Principe de superposition***

*Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues.
Si y_1 est une solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y' = a(x)\, y + b_1(x)$, et y_2 une solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y' = a(x)\, y + b_2(x)$, alors, pour tout couple de réels (λ_1, λ_2), $\lambda_1\ y_1 + \lambda_2\, y_2$ est une solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y' = a(x)\, y + \lambda_1\, b_1(x) + \lambda_2\, b_2(x)$.*

Corollaire 4. *Soient a et b deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues.*

Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur I de l'équation différentielle linéaire avec second membre $y' = a(x)\,y + b(x)$, alors la fonction différence $y_2 - y_1$ est une solution sur I de l'équation différentielle homogène associée $y' = a(x)\,y$.

Démonstration. Sachant que y_1 et y_2 sont solutions sur I de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, on obtient :

$$y_2' - y_1' = a(x)\,y_2 + b(x) - (a(x)\,y_1 + b(x)) = a(x)\,(y_2 - y_1)$$

D'où le résultat.

□

Exemple 2. On considère l'équation différentielle

$$y' = y + 2\,x + \sin x$$

La fonction qui, à tout réel x, associe $-2\,x - 2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = y + 2\,x$$

La fonction qui, à tout réel x, associe $-\dfrac{\sin x + \cos x}{2}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = y + \sin x$$

La fonction qui, à tout réel x, associe $-2\,x - 2 - \dfrac{\sin x + \cos x}{2}$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = y + 2\,x + \sin x$$

Théorème 36. ***Solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre***

Soient a et b deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues.
La solution générale sur I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre $y' = a(x)\,y + b(x)$ s'obtient comme somme de la solution générale sur I de l'équation différentielle homogène associée, et d'une solution particulière sur I de l'équation différentielle avec second membre.

Remarque 2. Pour mémoriser ce résultat, on peut le retenir sous la forme :

Solution générale de l'équation avec second membre

=

Solution générale de l'équation sans second membre

+

Solution particulière de l'équation avec second membre

ou, sous forme « abrégée » :

Solution générale E.A.S.M.

=

Solution générale E.S.S.M.

+

Solution particulière E.A.S.M.

Démonstration. Ce résultat vient du corollaire précédent ; en effet, si on connaît une solution y_1 de l'équation différentielle avec second membre, définie sur un intervalle J, n'importe quelle solution sera de la forme $y_1 + z$, où z est une solution sur J de l'équation homogène associée. Ainsi, toute solution sur J de l'équation avec second membre est telle que, pour tout réel x de J :

$$y(x) = y_1(x) + \lambda\, e^{\mathcal{F}_a(x)}$$

où λ est une constante réelle arbitraire, et $\mathcal{F}_a$ une fonction telle que, pour tout x de J :

$$\mathcal{F}_a'(x) = a(x)$$

□

Propriété 1. Extension aux fonctions à valeurs complexes
On admet que l'ensemble des résultats précédents est généralisable aux fonctions à valeurs complexes, i.e. dans $\mathbb{C}$.

Remarque 3. **Recherche de solutions particulières de l'équation avec second membre, dans le cas où la fonction a est constante**

i. Cas d'un second membre de type « exponentielle × polynôme » :

$$y'(x) = \alpha\, y(x) + P(x)\, e^{r\,x}$$

où P est une fonction polynomiale, et r et α deux réels.

$\rightsquigarrow$ **Premier cas : $r = \alpha$.**

On cherche une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto Q(x)\, e^{\alpha\, x}$$

où Q est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à degré de $P + 1$.

Exemple 3. Pour l'équation différentielle

$$y' = 3\, y - e^{3\,x}$$

le second membre est de type « exponentielle × polynôme » , la fonction polynomiale étant de degré 0.

On cherche donc une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto y(x) = (\lambda\, x + \mu)\; e^{3\,x}$$

où λ et μ sont deux réels, ce qui conduit, pour tout réel x, à :

$$y'(x) = (\lambda + 3\,\lambda\, x + 3\,\mu)\; e^{3\,x}$$

En injectant dans l'équation différentielle, on en déduit, pour tout réel x :

$$(\lambda + 3\,\lambda\, x + 3\,\mu)\; e^{3\,x} = 3\; (\lambda\, x + \mu)\; e^{3\,x} - e^{3\,x}$$

soit :

$$\lambda\, e^{3\,x} = -e^{3\,x}$$

et donc :

$$\lambda = -1$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc

$$x \mapsto y(x) = -e^{3\,x}$$

(comme il n'y a pas de condition sur μ, le cas $\mu = 0$ convient.)

Exemple 4. Pour l'équation différentielle

$$y' = 2\,y + (x+1)\,e^{2\,x}$$

le second membre est de type « exponentielle $\times$ polynôme » , la fonction polynomiale étant de degré 1.

On cherche donc une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto y(x) = \left(\lambda\,x^2 + \mu\,x + \nu\right)\,e^{2\,x}$$

où λ, μ et ν sont des réels, ce qui conduit, pour tout réel x, à :

$$y'(x) = \left(2\,\lambda\,x + \mu + 2\,\lambda\,x^2 + 2\,\mu\,x + 2\,\nu\right)\,e^{2\,x}$$

En injectant dans l'équation différentielle, on en déduit, pour tout réel x :

$$y'(x) = \left(2\,\lambda\,x + \mu + 2\,\lambda\,x^2 + 2\,\mu\,x + 2\,\nu\right)\,e^{2\,x} = 2\,\left(\lambda\,x^2 + \mu + \mu\,x + \nu\right)\,e^{2\,x} + (x+1)\,e^{2\,x}$$

soit :

$$y'(x) = \left(2\,\lambda\,x + \mu +\right)\,e^{2\,x} = (x+1)\,e^{2\,x}$$

et donc : $2\,\lambda = 1$, $\mu = 1$.
Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc

$$x \mapsto y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\,e^{2\,x}$$

$\rightsquigarrow$ **Deuxième cas : $r \neq \alpha$.**

On cherche une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto Q(x)\,e^{r\,x}$$

où Q est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal au degré de P.

Exemple 5. Pour l'équation différentielle

$$y' = y + e^{3\,x}$$

le second membre est de type « exponentielle × polynôme » , la fonction polynomiale étant de degré 0.

On cherche donc une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{3\,x}$$

où λ est un réel, ce qui conduit, pour tout réel x, à :

$$y'(x) = 3\,\lambda\, e^{3\,x}$$

En injectant dans l'équation différentielle, on en déduit, pour tout réel x :

$$3\,\lambda\, e^{3\,x} = \lambda\ e^{3\,x} + e^{3\,x}$$

soit :

$$2\,\lambda\ e^{3\,x} = e^{3\,x}$$

et donc :

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc

$$x \mapsto y(x) = \frac{1}{2}\, e^{3\,x}$$

Exemple 6. Pour l'équation différentielle

$$y' = 2\,y + x^2 + 1$$

le second membre est de type « exponentielle × polynôme » , la fonction polynomiale étant de degré 2.

On cherche donc une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto y(x) = \left(\lambda\, x^2 + \mu\, x + \nu\right)\, e^{0\times x} = \lambda\, x^2 + \mu\, x + \nu$$

où λ, μ et ν sont des réels, ce qui conduit, pour tout réel x, à :

$$y'(x) = 2\,\lambda\, x + \mu$$

En injectant dans l'équation différentielle, on en déduit, pour tout réel x :

$$2\,\lambda\, x + \mu = 2\,\lambda\, x^2 + 2\,\mu\, x + 2\,\nu + x^2 + 1$$

soit :

$$2\,(\lambda - \mu)\; x + \mu - 2\,\nu = (2\,\lambda\, + 1)\, x^2 + 1$$

et donc :

$$\lambda = \mu \quad , \quad \mu - 2\,\nu = 1 \quad , \quad 2\,\lambda\, + 1 = 0$$

Il en résulte :

$$\lambda = \mu = -\frac{1}{2} \quad , \quad \nu = \frac{\mu - 1}{2} = -\frac{3}{4}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc

$$x \mapsto y(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

Exemple 7. Pour l'équation différentielle

$$y' = 2\,y + x\,e^x$$

le second membre est de type « exponentielle × polynôme » , la fonction polynomiale étant de degré 1.

On cherche donc une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto y(x) = (\lambda\, x + \mu)\; e^x$$

où λ et μ sont des réels, ce qui conduit, pour tout réel x, à :

$$y'(x) = (\lambda\, x + \lambda + \mu)\; e^x$$

En injectant dans l'équation différentielle, on en déduit, pour tout réel x :

$$y'(x) = (\lambda\, x + \lambda + \mu)\; e^x = 2\;(\lambda\, x + \mu)\; e^x + x\, e^x$$

soit :

$$(-\lambda\, x + \lambda - \mu)\; e^x = x\, e^x$$

et donc :

$$\lambda = -1 \quad , \quad \lambda - \mu = 0 \tag{6.1}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc

$$x \mapsto y(x) = -\,(x+1)\; e^x \tag{6.2}$$

ii. Cas d'un second membre de type « polynôme × cosinus » :

$$y'(x) = \alpha\, y(x) + P(x)\, \cos(r\, x) \tag{6.3}$$

où P est une fonction polynomiale, et r un réel, on se ramène au cas précédent en recherchant une solution particulière sur $\mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \alpha\, y(x) + P(x)\, e^{i\, r\, x} \tag{6.4}$$

Il suffit ensuite de prendre la partie réelle de la solution obtenue.

Exemple 8. Pour l'équation différentielle

$$y' = y + \cos x \tag{6.5}$$

on se ramène à l'équation différentielle

$$y' = y + e^{i\, x} \tag{6.6}$$

On cherche donc une solution particulière, définie sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{i\, x} \tag{6.7}$$

où λ est un nombre complexe, ce qui conduit, pour tout réel x, à :

$$y'(x) = i\,\lambda\,e^{i\,x} \tag{6.8}$$

En injectant dans l'équation différentielle, on en déduit, pour tout réel x :

$$y'(x) = i\,\lambda\,e^{i\,x} = \lambda\,e^{i\,x} + e^{i\,x} \tag{6.9}$$

ce qui conduit à :

$$\lambda = \frac{1}{i-1} = -\frac{1+i}{2} \tag{6.10}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre initiale est donc

$$\begin{aligned} x \;\mapsto\; \mathcal{R}e\left(-\left(\frac{1+i}{2}\right)e^{i\,x}\right) &= \mathcal{R}e\left(-\left(\frac{1+i}{2}\right)(\cos x + i\,\sin x)\right) \\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{-\cos x - i\,\sin x - i\,\cos x + \sin x}{2}\right) \\ &= \frac{-\cos x + \sin x}{2} \end{aligned} \tag{6.11}$$

iii. Cas d'un second membre de type « polynôme × sinus » :

$$y'(x) = \alpha\,y(x) + P(x)\,\sin(r\,x) \tag{6.12}$$

où P est une fonction polynomiale, et r un réel, on se ramène au cas i. en recherchant une solution particulière sur $\mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \alpha\,y(x) + P(x)\,e^{i\,r\,x} \tag{6.13}$$

Il suffit ensuite de prendre la partie imaginaire de la solution obtenue.

Exemple 9. Pour l'équation différentielle

$$y' = y + \sin x \tag{6.14}$$

on se ramène à l'équation différentielle

$$y' = y + e^{i\,x} \tag{6.15}$$

On cherche donc une solution particulière de la forme

$$x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{i\,x} \tag{6.16}$$

où λ est un nombre complexe, ce qui conduit, pour tout réel x, à :

$$y'(x) = i\,\lambda\, e^{i\,x} \tag{6.17}$$

En injectant dans l'équation différentielle, on en déduit, pour tout réel x :

$$y'(x) = i\,\lambda\, e^{i\,x} = \lambda\, e^{i\,x} + e^{i\,x} \tag{6.18}$$

ce qui conduit à :

$$\lambda = \frac{1}{i-1} = -\frac{1+i}{2} \tag{6.19}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre initiale est donc

$$\begin{array}{rcl} x \;\mapsto\; \mathcal{R}e\left(-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\, e^{i\,x}\right) & = & \mathcal{I}m\left(-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\,(\cos x + i\,\sin x)\right) \\ & = & \mathcal{I}m\left(\dfrac{-\cos x - i\,\sin x - i\,\cos x + \sin x}{2}\right) \\ & = & \dfrac{-\cos x - \sin x}{2} \end{array} \tag{6.20}$$

Remarque 4. **Une méthode générale pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre : la méthode de variation de la constante**

Soient a et b deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues.
Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

$$y' = a(x)\,y + b(x)$$

La solution générale de l'équation homogène associée étant donnée par :

$$x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{\mathcal{F}_a(x)}$$

où λ est une constante réelle arbitraire, et $\mathcal{F}_a$ une fonction telle que, pour tout x de I :

$$\mathcal{F}_a'(x) = a(x)$$

on peut se demander s'il n'existerait pas des fonctions de la forme

$$x \mapsto y(x) = \lambda(x)\, e^{\mathcal{F}_a(x)}$$

qui soient solutions de l'équation avec second membre.
En injectant cette expression dans l'équation avec second membre, on obtient, pour tout x de I :

$$(a(x)\,\lambda(x) + \lambda'(x)\, e^{\mathcal{F}_a(x)} = a(x)\,\lambda(x)\, e^{\mathcal{F}_a(x)} + b(x)$$

ce qui conduit à :

$$\lambda'(x) = b(x)\, e^{-\mathcal{F}_a(x)}$$

Il suffit donc de prendre, pour λ, une fonction dont $x \mapsto b(x)\, e^{-\mathcal{F}_a(x)}$ soit la dérivée sur I.

Exemple 10. Résolvons, sur $]0, \infty[$, l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{x} + 1 \quad (\mathcal{E})$$

L'équation homogène associée est

$$y' = \frac{y}{x}$$

qui admet pour solutions, sur $]0, +\infty[$, les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\, x$, où λ est une constante réelle.
A l'aide de la méthode de variation de la constante, on recherche une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre $(\mathcal{E})$, sous la forme

$$x \mapsto y(x) = \lambda(x)\, x$$

On a alors, pour tout réel x strictement positif :

$$y'(x) = \lambda'(x)\, x + \lambda(x)$$

En injectant dans $(\mathcal{E})$, on en déduit, pour tout réel x strictement positif :

$$\lambda'(x)\,x + \lambda(x) = \frac{1}{x}\,\lambda(x)\,x + 1 = \lambda(x) + 1$$

et donc :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x}$$

Par suite, pour tout réel x strictement positif :

$$\lambda(x) = \ln x + C$$

où C est une constante réelle.

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est donc l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$x \mapsto x\,\ln x + C\,x$$

où C est une constante réelle.

Dans ce qui suit, le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Chapitre 7

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 5. Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$, et h une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'équation différentielle

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = h\,(x) \quad (\mathcal{E})$$

est une ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants***.

L'***équation homogène*** associée à $(\mathcal{E})$ est :

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

Proposition 1. Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

alors, pour tout couple de réels (λ_1, λ_2), $\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2$ est une solution sur I de l'équation différentielle linéaire homogène

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

(On dit que l'ensemble des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $C^2(I; \mathbb{K})$)

Pour déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

on les cherche sous la forme

$$t \mapsto e^{r\,t} \quad , \quad r \in \mathbb{K}$$

ce qui conduit à :

$$a\,r^2\,e^{r\,t} + b\,r\,e^{r\,t} + c\,e^{r\,t} = 0$$

L'exponentielle ne s'annulant jamais, on en déduit :

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \quad (\star)$$

Ainsi, si $r \in \mathbb{K}$ est racine de l'équation du second degré $(\star)$, la fonction qui, à tout réel t associe $e^{r\,t}$ est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$.

Définition 6. Equation caractéristique

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$.
L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = h\,(x) \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

est

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

Théorème 37. *Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$, et*

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

Alors :

i. lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ est strictement positif, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont les fonctions qui, à tout réel t de I, associent

$$\lambda\,e^{r_1\,t} + \mu\,e^{r_2\,t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ii. lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ est nul, l'équation caractéristique admet une racine réelle double r_0. Les solutions de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont les fonctions qui, à tout réel t de I, associent

$$(\lambda\,t + \mu)\;e^{r_0\,t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

iii. lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ est strictement négatif, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\,\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\,\beta$. Les solutions de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont les fonctions qui, à tout réel t de I, associent

$$\lambda\,e^{r\,t} + \mu\,e^{\bar{r}\,t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$e^{\alpha\,t}\;\{\lambda_0\,\cos(\beta\,t) + \mu_0\,\sin(\beta\,t)\} \quad , \quad (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$$

(On dit que l'ensemble des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $C^2(I; \mathbb{K})$, car toutes les solutions ne s'expriment qu'en fonction deux fonctions données, elles-mêmes solutions.)

Démonstration. On se place dans le cas où le coefficient a n'est pas nul. Il est clair que, si r est racine de l'équation caractéristique, toute fonction de la forme

$$t \mapsto e^{r\,t}$$

est solution de $(\mathcal{E}_\mathcal{H})$. Il reste à montrer la réciproque, i.e. que toute solution de $(\mathcal{E}_\mathcal{H})$ est de la forme

$$t \mapsto e^{r\,t}$$

où r est racine de l'équation caractéristique.

Comme $a \neq 0$, l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_\mathcal{H})$ s'écrit aussi :

$$y'' + \frac{b}{a}\,y' + \frac{c}{a}\,y = 0$$

i. Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ est strictement positif, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, qui vérifient :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad r_1\,r_2 = -\frac{c}{a}$$

Il est alors intéressant de remarquer que, compte-tenu de l'identité

$$r^2 + \frac{b}{a}\,r + \frac{c}{a} = (r - r_1)\,(r - r_2)$$

on a, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_\mathcal{H})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$y'' + \frac{b}{a}\,y' + \frac{c}{a}\,y = (y' - r_1\,y)' - r_2\,(y' - r_1\,y) = (y' - r_2\,y)' - r_1\,(y' - r_2\,y) = 0$$

Ainsi, dans un premier temps :

$$(y' - r_1\,y)' = r_2\,(y' - r_1\,y)$$

ce qui conduit à :

$$y' - r_1\,y = C_2\,e^{r_2\,t} \quad , \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Compte-tenu de

$$(y' - r_2\,y)' = r_1\,(y' - r_2\,y)$$

on obtient, de même :

$$y' - r_2\,y = C_1\,e^{r_1\,t} \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

On a donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' - r_1\,y & = & C_2\,e^{r_2\,t} \\ y' - r_2\,y & = & C_1\,e^{r_1\,t} \end{array} \right. \quad , \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit :

$$(r_1 - r_2)\, y = -C_1\, e^{r_1\, t} + C_2\, e^{r_2\, t} \quad , \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

soit encore :

$$y = -\frac{C_1}{r_1 - r_2}\, e^{r_1\, t} + \frac{C_2}{r_1 - r_2}\, e^{r_2\, t} \quad , \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Toute solution de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ est donc bien de la forme :

$$t \mapsto \lambda\, e^{r_1\, t} + \mu\, e^{r_2\, t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

◇

ii. Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4\, a\, c$ est nul, l'équation caractéristique admet une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$.

Il est alors intéressant de remarquer que, compte-tenu de l'identité

$$r^2 + \frac{b}{a}\, r + \frac{c}{a} = (r - r_0)^2$$

on a, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$y'' + \frac{b}{a}\, y' + \frac{c}{a}\, y = (y' - r_0\, y)' - r_0\, (y' - r_0\, y) = 0$$

Ainsi :

$$(y' - r_0\, y)' = r_0\, (y' - r_0\, y) \qquad (\star)$$

ce qui conduit à :

$$y' - r_0\, y = C_0\, e^{r_0\, t} \quad , \quad C_0 \in \mathbb{R}$$

La solution générale de l'équation homogène associée à cette dernière équation différentielle $(\star)$ est de la forme :

$$t \mapsto C\, e^{r_0\, t} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre, on utilise la méthode de variation de la constante, en recherchant cette solution sous la forme :

$$t \mapsto C(t)\, e^{r_0\, t}$$

ce qui conduit à :

$$C'(t)\, e^{r_0\, t} = C_0\, e^{r_0\, t}$$

puis :

$$C'(t) = C_0$$

et donc :

$$C(t) = C_0\, t + C_1$$

Ainsi, la solution générale de l'équation avec second membre ($\star$) est de la forme :

$$t \mapsto C_0\, e^{r_0\, t} + C_0\, t_, e^{r_0\, t} \quad , \quad C_0 \in \mathbb{R}$$

Toute solution de l'équation différentielle homogène ($\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$) est donc bien de la forme :

$$(\lambda\, t + \mu)\ e^{r_0\, t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$\diamond$

iii. Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4\, a\, c$ est strictement négatif, l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, qui vérifient :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad r_1\, r_2 = -\frac{c}{a}$$

Il est alors intéressant de remarquer que, compte-tenu de l'identité

$$r^2 + \frac{b}{a}\, r + \frac{c}{a} = (r - r_1)\,(r - r_2)$$

on a, pour toute solution y de ($\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$y'' + \frac{b}{a}\, y' + \frac{c}{a}\, y = (y' - r_1\, y)' - r_2\ (y' - r_1\, y) = (y' - r_2\, y)' - r_1\ (y' - r_2\, y) = 0$$

Ainsi, dans un premier temps :

$$(y' - r_1\, y)' = r_2\ (y' - r_1\, y)$$

ce qui conduit à :

$$y' - r_1\, y = C_2\, e^{r_2\, t} \quad , \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Compte-tenu de

$$(y' - r_2\, y)' = r_1\, (y' - r_2\, y)$$

on obtient, de même :

$$y' - r_2\, y = C_1\, e^{r_1\, t} \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

On a donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' - r_1\, y & = & C_2\, e^{r_2\, t} \\ y' - r_2\, y & = & C_1\, e^{r_1\, t} \end{array} \right. \quad , \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit :

$$(r_1 - r_2)\, y = -C_1\, e^{r_1\, t} + C_2\, e^{r_2\, t} \quad , \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

soit encore :

$$y = -\frac{C_1}{r_1 - r_2}\, e^{r_1\, t} + \frac{C_2}{r_1 - r_2}\, e^{r_2\, t} \quad , \quad (C_1, C2) \in \mathbb{R}^2$$

Toute solution de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_\mathcal{H})$ est donc bien de la forme :

$$t \mapsto \lambda\, e^{r_1\, t} + \mu\, e^{r_2\, t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

□

Théorème 38. ***Solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre***

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$, et h une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = h(t) \quad (\mathcal{E})$$

La solution générale sur I de l'équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = h(t) \quad (\mathcal{E})$$

s'obtient comme somme de la solution générale sur I de l'équation différentielle homogène associée, et d'une solution particulière sur I de l'équation différentielle avec second membre.

Remarque 5. Pour mémoriser ce résultat, on peut le retenir sous la forme :

Solution générale de l'équation avec second membre

$=$

Solution générale de l'équation sans second membre

$+$

Solution particulière de l'équation avec second membre

ou, sous forme « abrégée » :

Solution générale E.A.S.M.

$=$

Solution générale E.S.S.M.

$+$

Solution particulière E.A.S.M.

Troisième partie

Fonctions réciproques

On s'intéresse, dans ce qui suit, aux conditions d'existence d'une fonction réciproque pour une fonction définie et continue sur un intervalle, et, sous réserve d'existence, ses propriétés : continuité, dérivabilité, représentation graphique.

Chapitre 8

Fonctions réciproques

8.1 Définitions

Définition 1. Injectivité
Etant données deux parties $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{R}$, une application $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ est dite ***injective*** si, pour tout couple $(x, x') \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1$:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Définition 2. Surjectivité
Etant données deux parties $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{R}$, une application $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ est dite ***surjective*** si tout élément y de $\mathcal{P}_2$ admet au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in \mathcal{P}_2, \exists x \in \mathcal{P}_1 : y = f(x)$$

Définition 3. Bijectivité
Etant données deux parties $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{R}$, une application $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ est dite ***bijective*** si elle est injective et surjective, i.e. si tout élément y de $\mathcal{P}_2$ admet un unique antécédent par f :

$$\forall y \in \mathcal{P}_2, \exists!\, x \in \mathcal{P}_1 : y = f(x)$$

Définition 4. Application identité
Etant donnée une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$, l'application

$$\begin{array}{rccc} id_{\mathcal{P}} : & \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

est appelée ***application identité*** de $\mathcal{P}$.

Définition 5. Fonction réciproque
Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux parties de $\mathbb{R}$, et $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ une application bijective. Pour chaque élément y de $\mathcal{P}_2$, l'unique élément x de $\mathcal{P}_1$ tel que $f(x) = y$ est noté $f^{-1}(y)$. L'application $f^{-1} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ ainsi définie est appelée ***application réciproque*** de f.

Propriété 1. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux parties de $\mathbb{R}$, et $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ une application bijective. Alors, pour tout réel x de $\mathcal{P}_1$:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = id_{\mathcal{P}_1}(x) = x$$

et, pour tout réel y de $\mathcal{P}_2$:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = id_{\mathcal{P}_2}(y) = y$$

Il s'agit, ensuite, d'appliquer ces définitions générales au cas particulier des fonctions définies sur un intervalle I, non vide et non réduit à un point.

Remarque 1. Une fonction f définie sur un intervalle I est, par définition, une surjection de I sur $f(I)$. Par suite, la fonction f admet une application réciproque, définie sur $f(I)$, si et seulement si elle est bijective de I sur $f(I)$, et donc si et seulement si elle est injective sur I.

Remarque 2. Pour s'assurer que la fonction réciproque d'une fonction donnée f est définie sur un intervalle J, il suffit de supposer que la fonction f est continue sur l'intervalle I car, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que $J = f(I)$ est un intervalle.

8.2 Injectivité et monotonie

Propriété 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide, et non réduit à un point. Alors :

i. Si f est strictement monotone sur I, alors elle est injective sur I.

ii. Si f est continue et injective sur I, alors elle est strictement monotone sur I.

Démonstration. Ce théorème est admis.

□

Remarque 3. On sait déjà que l'image d'un intervalle I par une fonction continue f est un intervalle ; cependant lorsque, de plus, la fonction f est strictement monotone, on peut préciser l'intervalle $f(I)$.

Propriété 3. Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, de bornes a et b. Alors, l'intervalle $f(I)$ a pour bornes $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ (ces limites pouvant être elles-mêmes finies ou infinies) et les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature : fermés, ouverts, ou semi-ouverts.

8.3 Théorème des fonctions réciproques

Théorème 39. *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors :*

i. *L'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle (de même nature que I), et dont les extrémités sont les limites de f aux bornes de I.*

ii. *La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J.*

iii. *La fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de monotonie que f.*

iv. *Si la fonction f est dérivable en un point a de I et si $f'(a) \neq 0$, la fonction f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

De façon équivalente :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration. Les points *i.* et *ii.* ont été vus dans les propositions précédentes. Le troisième point, i.e. la continuité de f^{-1}, est admis. On ne démontrera ici que la dérivabilité de la fonction réciproque.
A cet effet, on suppose que la fonction f est dérivable en un point a de l'intervalle

I, et que $f'(a) \neq 0$.
Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ revient à montrer que le rapport $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$ a une limite lorsque y tend vers b, en restant bien sûr dans l'intervalle J.
Pour tout y de $J = f(I)$, le nombre $x = f^{-1}(y)$ de I vérifie la condition $y = f(x)$. Il en résulte :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Comme la fonction f^{-1} est continue en b, le nombre $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$ lorsque y tend vers b. Le rapport $\dfrac{x - a}{f(x) - f(a)}$ a donc une limite, puisque la fonction f est dérivable en a et que sa dérivée $f'(a)$ est non nulle. On obtient :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

$\square$

8.4 Représentation graphique

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. Par suite :

$$(x \in I \quad \text{et} \quad f(x) = y) \quad \Leftrightarrow \quad \left(y \in J \quad \text{et} \quad f^{-1}(y) = x\right)$$

Ainsi, le graphe de la fonction réciproque f^{-1}, i.e. l'ensemble des couples $(y, f^{-1}(y))$ lorsque y parcourt l'intervalle J, est donc aussi l'ensemble des couples $(f(x), x)$ lorsque x parcourt l'intervalle I. Or, dans un repère orthonormé, le point de coordonnées (a, b), $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est le symétrique par rapport à la première bissectrice du point de coordonnées (b, a).

Propriété 4. Graphe d'une fonction réciproque
Soit f une fonction continue, réalisant une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Alors, le graphe de f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice (qui est aussi la droite d'équation $y = x$).

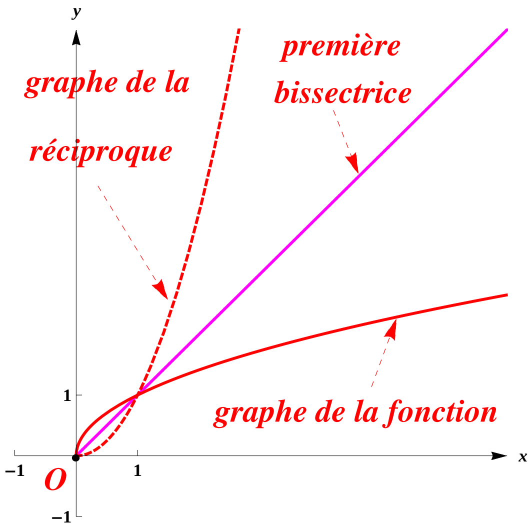


FIGURE 8.1 – Le graphe d'une fonction bijective, et celui de sa réciproque.

8.5 Les fonctions trigonométriques inverses

8.5.1 La fonction *arcsinus*

La restriction $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est continue et strictement croissante. D'après le théorème des fonctions réciproques :

$$\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[-1,1]$$

Cette restriction établit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
La fonction réciproque de cette restriction est appelée *fonction arcsinus*, et notée arcsin. C'est une bijection de $[-1,1]$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\arcsin x$ est donc l'unique élément de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ qui a pour sinus le réel x :

$$\sin(\arcsin x)=x$$

De même, pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\arcsin(\sin x)=x$$

Par définition :

$$\arcsin(0)=0\quad,\quad\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}\quad,\quad\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Les propriétés de la fonction *arcsinus* sont les suivantes :

i. La fonction *arcsinus* est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$. C'est une conséquence directe du théorème des fonctions réciproques.

ii. La fonction *arcsinus* est impaire. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, la courbe représentative de la fonction *arcsinus* est la courbe symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe représentative de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

iii. La restriction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée $x \mapsto \cos x = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Cette dérivée ne s'annulant pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction *arcsinus* est donc dérivable sur $]-1, 1[$, sa dérivée étant définie, pour tout x de $]-1, 1[$, par :

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

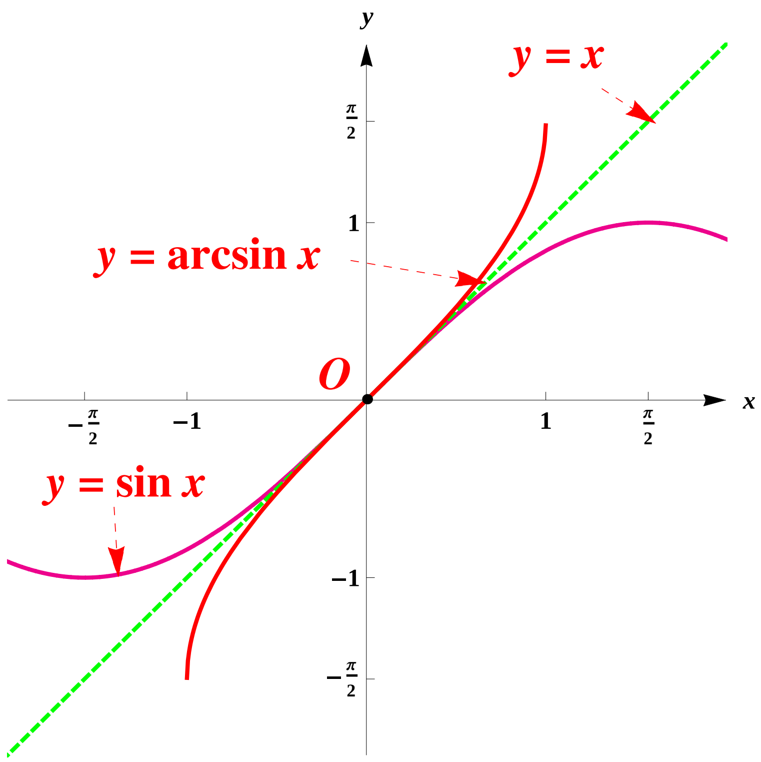


FIGURE 8.2 – La courbe représentative de la fonction *arcsinus*.

8.5.2 La fonction *arcosinus*

La restriction $\cos_{|[0,\pi]}$ de la fonction *cosinus* à l'intervalle $[0,\pi]$ est continue et strictement décroissante. D'après le théorème des fonctions réciproques, elle établit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La fonction réciproque de cette restriction est appelée *arccosinus*, et notée « arccos ». C'est une bijection de $[-1,1]$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.
Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\arccos x$ est donc l'unique élément de l'intervalle $[0,\pi]$ qui a pour cosinus le réel x :

$$\cos(\arccos x) = x$$

De même, pour tout réel x de $[0,\pi]$:

$$\arccos(\cos x) = x$$

Par définition :

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \arccos(1) = 0 \quad , \quad \arccos(-1) = \pi$$

Les propriétés de la fonction *arccosinus* sont les suivantes :

i. La fonction *arccosinus* est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.

ii. La restriction $\cos_{|[0,\pi]}$ étant dérivable sur $[0,\pi]$, de dérivée $x \mapsto -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$, qui ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. La fonction *arccosinus* est donc dérivable sur $]-1,1[$, sa dérivée étant définie, pour tout x de $]-1,1[$, par :

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

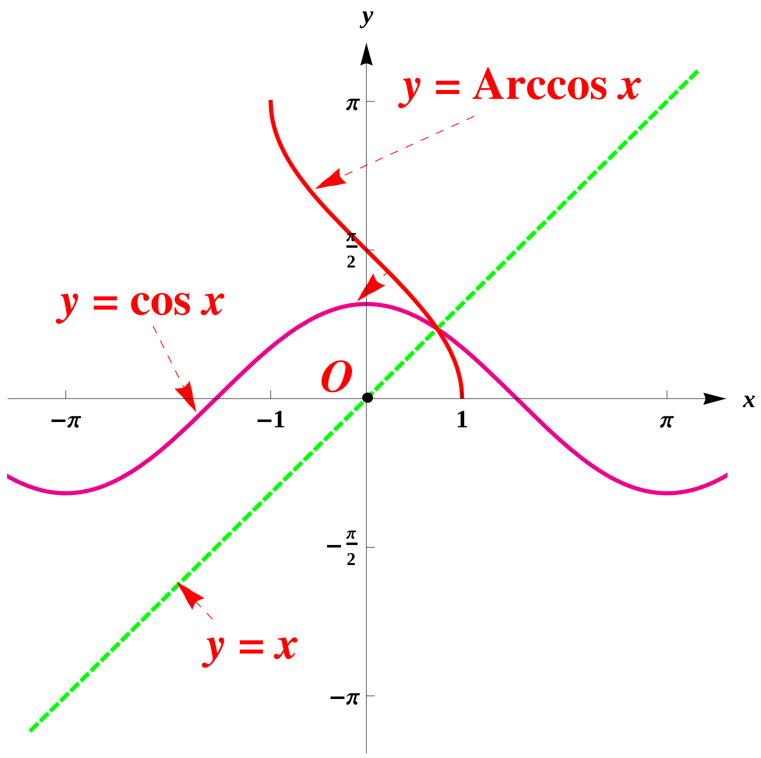


FIGURE 8.3 – La courbe représentative de la fonction *arccosinus*.

8.5.3 La fonction *arctangente*

La restriction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ de la fonction *tangente* à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
D'après le théorème « des fonctions réciproques » :

$$\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan x,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x\right[=\mathbb{R}$$

En outre, cette restriction établit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque de la restriction de la fonction *tangente* à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est appelée *fonction arctangente*, et notée « arctan ». C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Pour tout réel x, $\arctan x$ est donc l'unique élément de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ qui a pour tangente le réel x :

$$\tan(\arctan x)=x$$

Par définition : $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
Attention ! Il y a une infinité de réels dont la tangente est égale à 1. Mais parmi ces réels, seul $\dfrac{\pi}{4}$ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Les propriétés de la fonction *arctangente* sont les suivantes :

i. La fonction *arctangente* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est une conséquence directe du théorème des fonctions réciproques. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \tag{8.1}$$

ii. La fonction *arctangente* est impaire. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, la courbe représentative de la fonction *arctangente* est la courbe obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe représentative de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

iii. On rappelle que la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de dérivée $x \mapsto 1 + \tan^2 x$. Cette dérivée n'est jamais nulle. Par suite, la fonction *arctangente* est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée étant donnée par :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

iv. Pour tout réel strictement positif x :

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et, pour tout réel strictement négatif x :

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

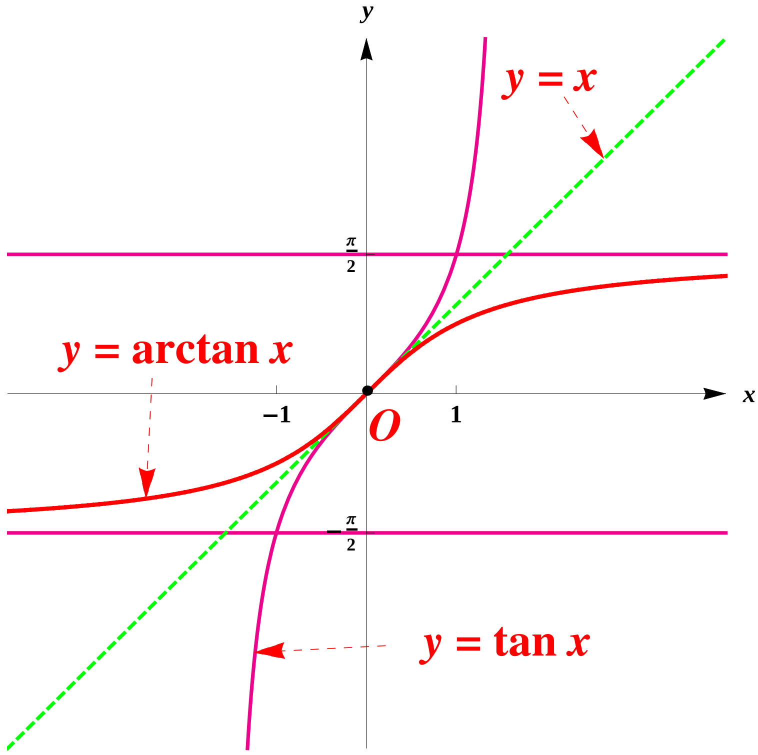


FIGURE 8.4 – La courbe représentative de la fonction *arctangente*.

8.6 Les fonctions hyperboliques inverses

8.6.1 La fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée ***argument sinus hyperbolique***, notée Argsh, et vérifie, pour tout réel x :

$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Les propriétés de la fonction *argument sinus hyperbolique* sont les suivantes :

i. La fonction *argument sinus hyperbolique* est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est définie, pour tout réel x, par :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ii. La fonction *argument sinus hyperbolique* est impaire.

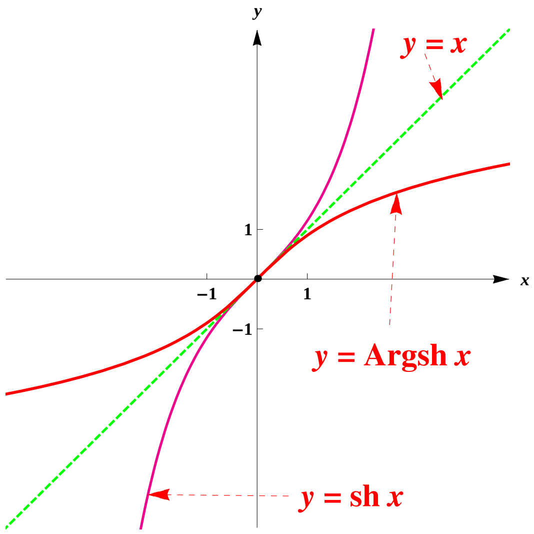


FIGURE 8.5 – La courbe représentative de la fonction *argument sinus hyperbolique*.

8.6.2 La fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[1,+\infty[$. Sa fonction réciproque est appelée ***argument cosinus hyperbolique***, notée Argch, telle que, pour tout x de $[1,+\infty[$:

$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

La fonction *argument tangente hyperbolique* est continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$, et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Sa dérivée est définie, pour tout x de $]1,+\infty[$, par :

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

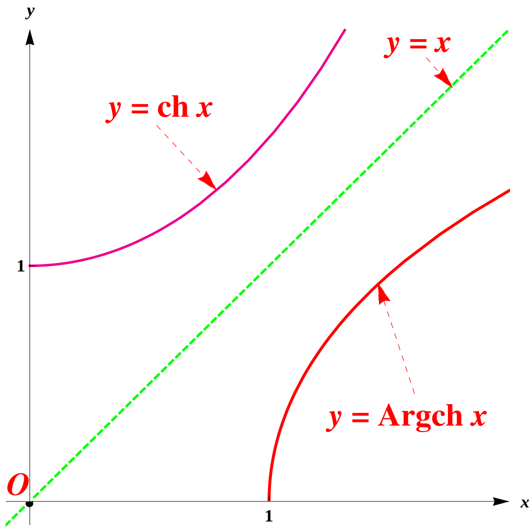


FIGURE 8.6 – La courbe représentative de la fonction *argument cosinus hyperbolique*.

8.6.3 La fonction argument tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Sa fonction réciproque est appelée ***argument tangente hyperbolique***, notée Argth, telle que, pour tout x de $]-1,1[$:

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Les propriétés de la fonction *argument tangente hyperbolique* sont les suivantes :

i. La fonction *argument tangente hyperbolique* est continue, dérivable et strictement croissante sur $]-1,1[$. Sa dérivée est définie, pour tout x de $]-1,1[$, par :

$$\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

ii. La fonction *argument tangente hyperbolique* est impaire.

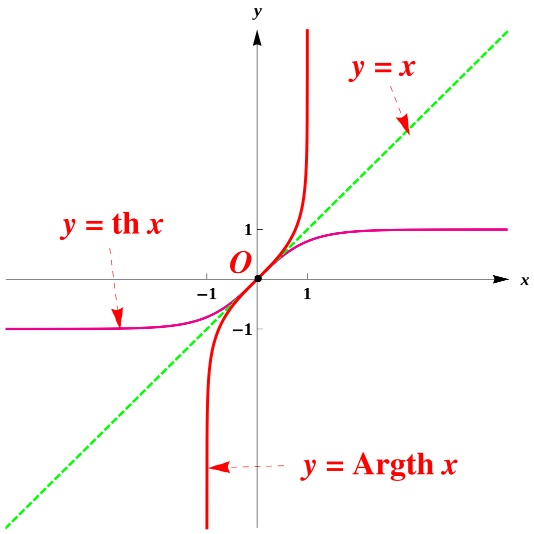


FIGURE 8.7 – La courbe représentative de la fonction *argument tangente hyperbolique*.

Quatrième partie

Intégration sur un segment

Chapitre 9

Préambule : Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Définition 6. Considérons une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$. On appelle ***intégrale de*** a ***à*** b ***de*** f la valeur de l'aire comprise entre la courbe représentative de f sur $[a, b]$ et l'axe des abscisses.

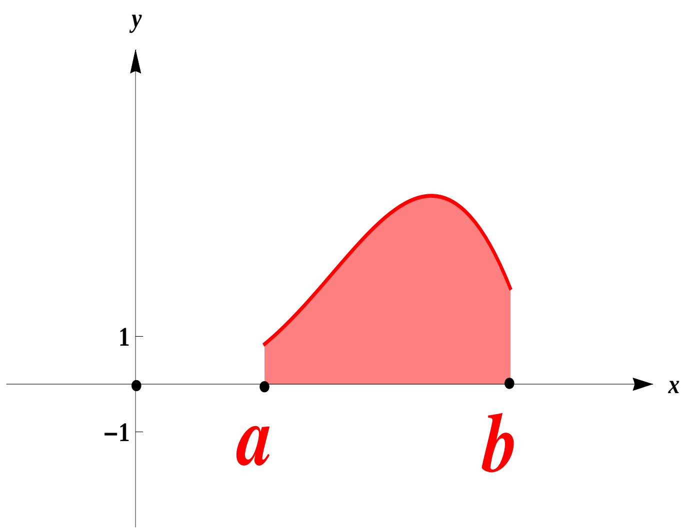


FIGURE 9.1 – L'aire sous la courbe représentative de f entre a et b

Le cas présenté ci-dessus ne reflète, hélas, pas la réalité des fonctions que l'on rencontre dans la vie de tous les jours du physicien, du chimiste, du biologiste, etc ... En effet, la plupart des fonctions ne possèdent pas toutes des propriétés de régularité, en particulier, elles ne sont pas nécessairement continues (ce qui est le cas,

par exemple, d'un effort appliqué localement sur une poutre).
Afin de pouvoir calculer l'intégrale d'une fonction qui n'est pas toujours continue, les mathématiciens ont commencé par construire l'intégrale de fonctions « échelonnées », ou « en escalier », qui correspondent à des réalités physiques, comme, par exemple, une répartition de chaleur sur un barreau métallique de longueur infinie, en fonction de l'abscisse x :

$$T(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [-1, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

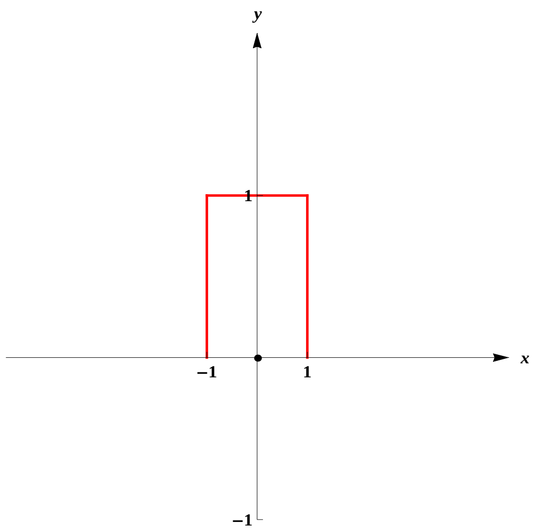


FIGURE 9.2 – Une fonction « créneau ».

Si on cherche à représenter, par exemple, l'évolution du prix du blé en fonction du temps, en considérant qu'il garde une valeur constante chaque semaine, tout en pouvant augmenter ou diminuer la semaine suivante, on obtient aussi une fonction en escaliers :

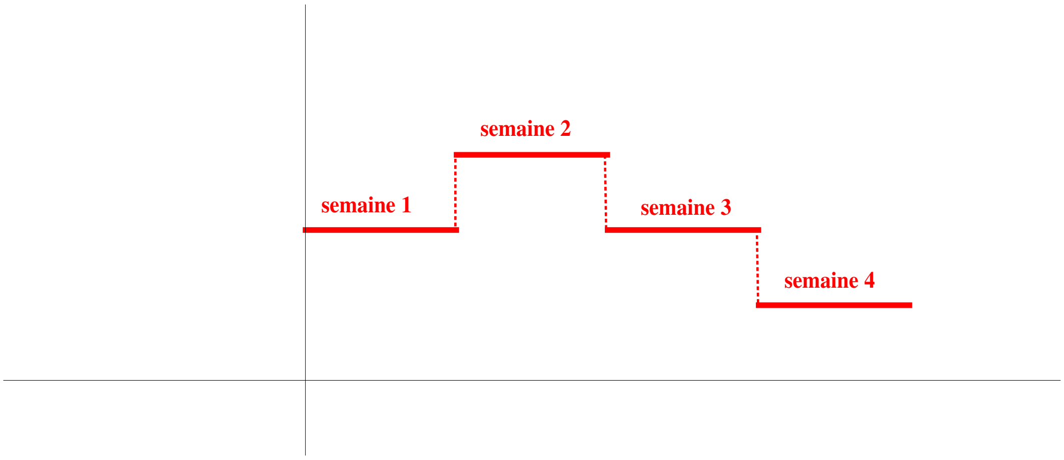


Figure 9.3 – Un exemple de fonction en escaliers : l'évolution du prix du blé en fonction du temps.

Ainsi, Bernhard Riemann [1], choisit, pour calculer l'intégrale d'une fonction quelconque, d'approcher celle-ci par des fonctions « en escaliers ».
Il est ensuite très facile d'étendre les résultats obtenus pour ces fonctions « basiques » à des fonctions beaucoup plus régulières !

1. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand. Outre ses travaux sur l'intégration, il a créé la théorie des fonctions algébriques, et développé les travaux de Cauchy sur les fonctions de variables complexes ; en géométrie différentielle, il introduisit le concept de *variété*, qui conduira, ultérieurement, à la géométrie riemannienne.

Chapitre 10

Intégrale d'une fonction en escaliers

10.1 Définitions

Définition 7. Subdivision d'un intervalle
Etant donné un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et n un entier naturel non nul, on appelle ***subdivision de*** $[a, b]$ tout ensemble σ de réels $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tel que :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

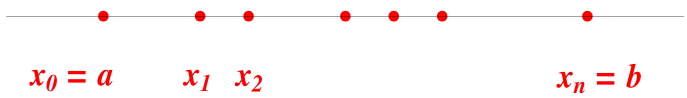


FIGURE 10.1 – Une subdivision de l'intervalle $[a, b]$.

Le ***pas*** de la subdivision est

$$|\sigma| = Sup\,\{x_i - x_{i-1},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Définition 8. Subdivision régulière
Une subdivision σ est dite ***régulière*** si elle est de pas constant.

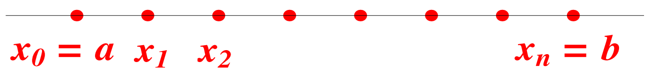


FIGURE 10.2 – Une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$.

Définition 9. Etant donnés deux entiers naturels non nuls n et p, et deux subdivisions $\sigma_x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $\sigma_y = \{y_0, y_1, \ldots, y_p\}$ d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la subdivision σ_x est dite ***plus fine*** que σ_y si

$$\{y_0, y_1, \ldots, y_p\} \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

Définition 10. Fonction en escaliers
Une fonction f, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, est dite ***en escaliers*** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, f soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.

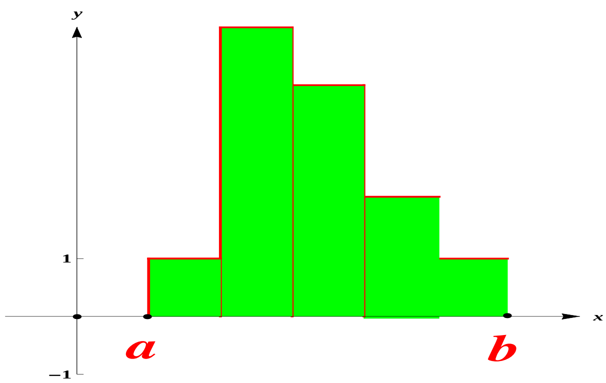


FIGURE 10.3 – Le graphe d'une fonction en escaliers sur l'intervalle $[a, b]$.

Définition 11. Subdivision adaptée à une fonction en escaliers
Etant donnée une fonction f en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ est dite ***adaptée à*** f si, pour tout i de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Propriété 5. Etant données deux fonctions f et g en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et un réel λ, la fonction $f + \lambda\, g$ est aussi en escaliers sur $[a, b]$.

Définition 12. Intégrale d'une fonction en escaliers

Soit f une fonction en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul, et $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Pour tout entier i de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, on désigne par y_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On appelle ***intégrale (de Riemann) de*** f ***sur*** $[a, b]$ le réel

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i$$

Propriété 6. Etant donnée une fonction en escaliers f sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, la valeur de l'intégrale de f sur $[a, b]$ ne dépend pas de la subdivision (adaptée à f) choisie.

Définition 13. Soit f une fonction en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors

$$\int_b^a f(t)\, dt = -\int_a^b f(t)\, dt$$

10.2 Propriétés

Propriété 7. Linéarité
Etant données deux fonctions f et g en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et un réel λ :

$$\int_a^b (f(t) + \lambda\, g(t))\; dt = \int_a^b f(t)\, dt + \lambda \int_a^b g(t)\, dt$$

Propriété 8. Positivité
Etant donnée une fonction f en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à **valeurs positives** :

$$\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$$

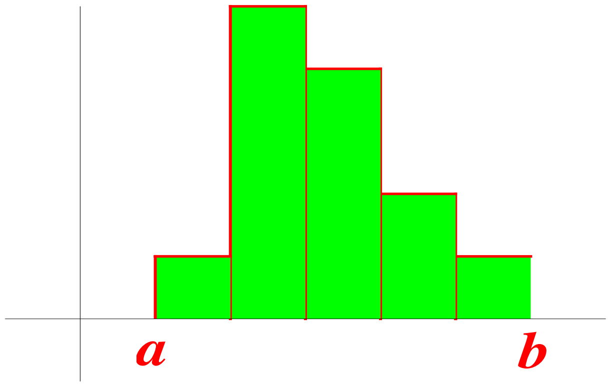


FIGURE 10.4 – L'intégrale d'une fonction en escaliers sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs positives.

Propriété 9. Croissance
Etant données deux fonctions f et g en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, t \,\in\, [a, b] \,:\, f(t) \leqslant g(t)$$

alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt$$

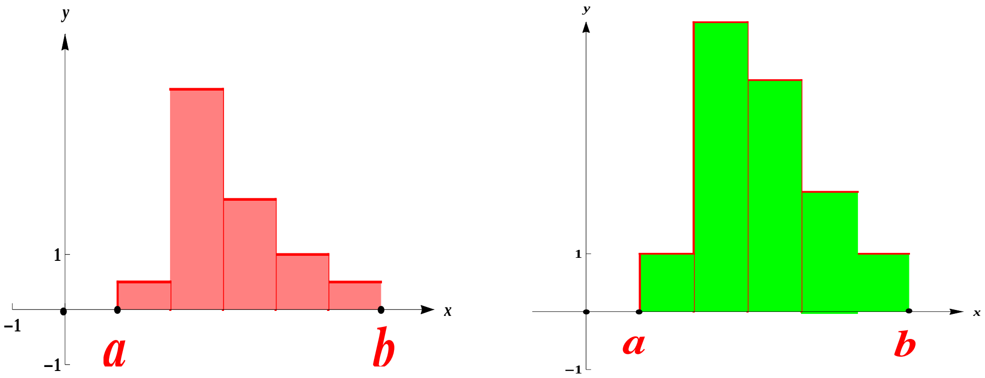


FIGURE 10.5 – Illustration graphique de la croissance pour une intégrale, dans le cas de fonctions en escalier.

Propriété 10. Valeur absolue d'une intégrale
Etant donnée une fonction f en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Propriété 11. Relation de Chasles
Soit f une fonction f en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout c de $[a, b]$:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

Propriété 12. Etant données deux fonctions f et g en escaliers sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, égales sauf en un nombre fini de points[1] :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt$$

1. Des fonctions égales, sauf en des points isolés, sont dites « égales presque partout ». L'ensemble de ces points peut être infini. On a ici un cas particulier de « égales presque partout » sur $[a, b]$, puisqu'elles ne diffèrent qu'en un nombre fini de points.

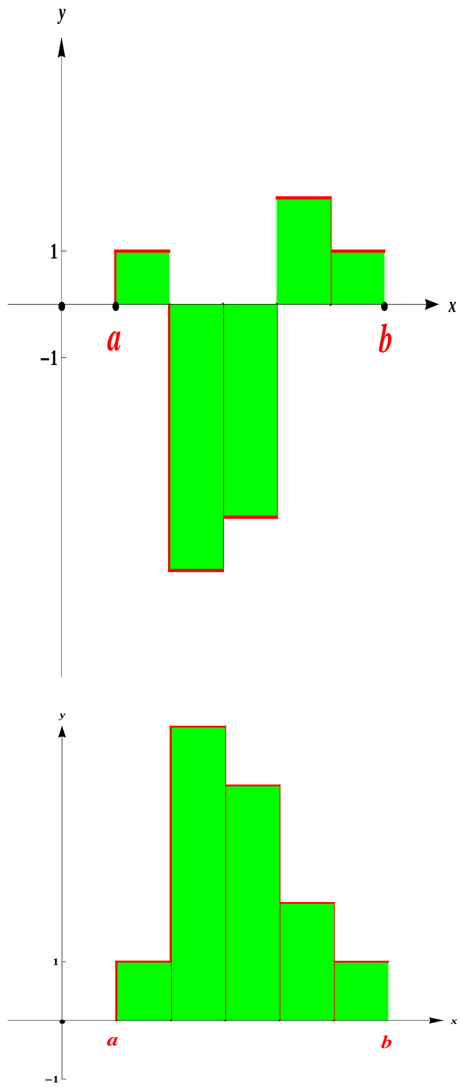


FIGURE 10.6 – Comparaison entre la valeur absolue d'une intégrale et l'intégrale de la valeur absolue, dans le cas de fonctions en escalier.

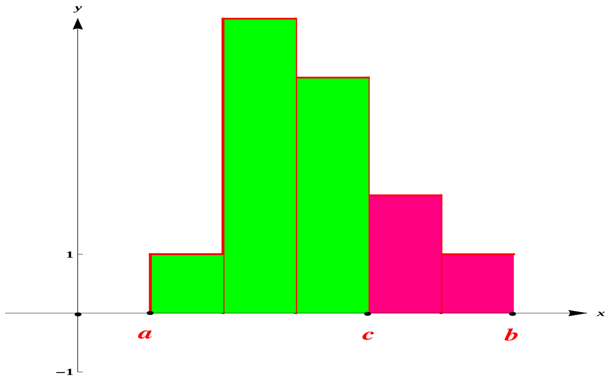


FIGURE 10.7 – Illustration graphique de la relation de Chasles pour une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$.

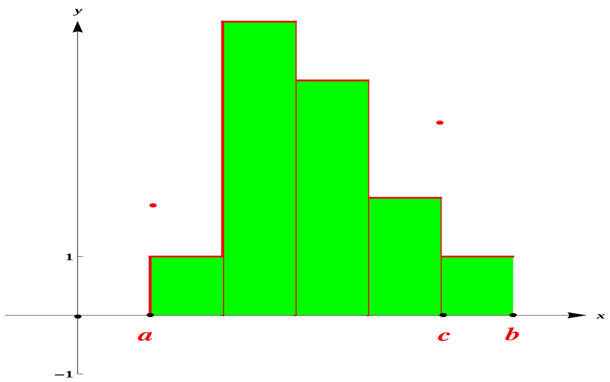


FIGURE 10.8 – Intégrale de deux fonctions en escaliers sur un intervalle $[a, b]$, égales sauf en a, c et d.

Chapitre 11

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

11.1 Définitions

Définition 14. Fonction continue par morceaux
Une fonction f, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, est dite ***continue par morceaux*** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, la restriction $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$, et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}.

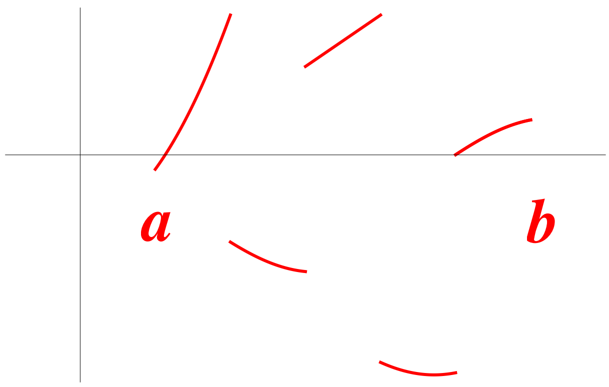


FIGURE 11.1 – Le graphe d'une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$.

Définition 15. Subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux

Etant donnée une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ est dite ***adaptée à*** f si, pour tout i de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, la restriction $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$, et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}.

Proposition 1. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel strictement positif ε, il existe deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$, φ et ψ telles que, pour tout réel x de $[a, b]$:

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$$

et :

$$0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$$

Définition 16. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Il existe un unique réel $I(f)$ tel que, pour tout couple de fonctions en escaliers (φ, ψ) dont on désigne par $I(\varphi)$ et $I(\psi)$ les intégrales sur $[a, b]$, on ait :

$$I(\varphi) \leqslant I(f) \leqslant I(\psi)$$

Ce nombre $I(f)$ est appelé ***intégrale de*** a ***à*** b ***de*** f, et noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. La fonction f est alors dite intégrable sur $[a, b]$.

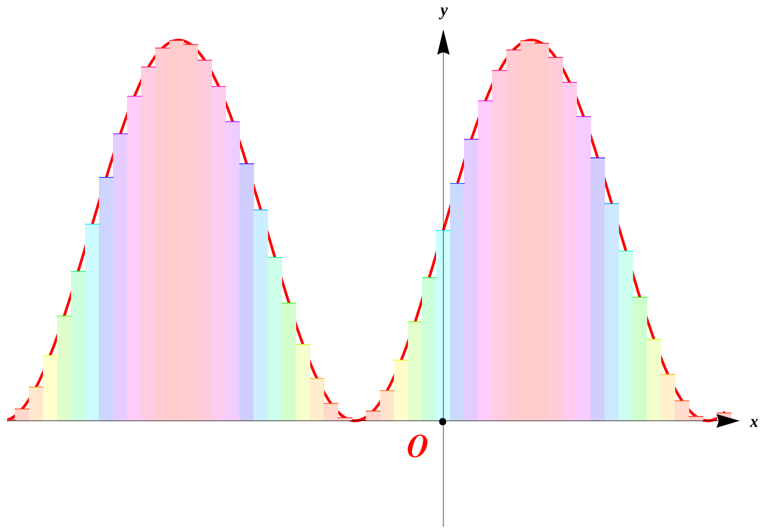
Définition 17. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Remarque 4. Cela vient simplement du fait que l'intégrale $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt$ correspond à une aire comptée négativement.

Théorème 40. ***Sommes de Riemann, dans le cas d'une subdivision uniforme***
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$



Remarque 5. Ce résultat, que l'on ne démontrera pas dans ce cours, se comprend assez facilement de façon intuitive, dans la mesure où la somme $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$ représente tout simplement la somme des aires des rectangles de longueur $\frac{b-a}{n}$, et de hauteur $f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$.

Remarque 6. On a présenté, dans ce qui précède, le cas d'une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$. Les sommes de Riemann ne se limitent pas à ce seul cas, et restent encore valables pour des subdivisions non uniformes, sous la condition bien sûr que le pas de celles-ci tende vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.

11.2 Propriétés

Propriété 13. Linéarité
Etant données deux fonctions f et g continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et un réel λ :

$$\int_a^b (f(t) + \lambda\, g(t))\; dt = \int_a^b f(t)\, dt + \lambda \int_a^b g(t)\, dt$$

Propriété 14. Positivité
Etant donnée une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à **valeurs positives** :

$$\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$$

Propriété 15. Stricte positivité
Etant donnée une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à **valeurs strictement positives** :

$$\int_a^b f(t)\, dt > 0$$

Propriété 16. Croissance
Etant données deux fonctions f et g continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, t\, \in\, [a, b]\; :\; f(t) \leqslant g(t)$$

alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt$$

Propriété 17. Valeur absolue d'une intégrale
Etant donnée une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$:

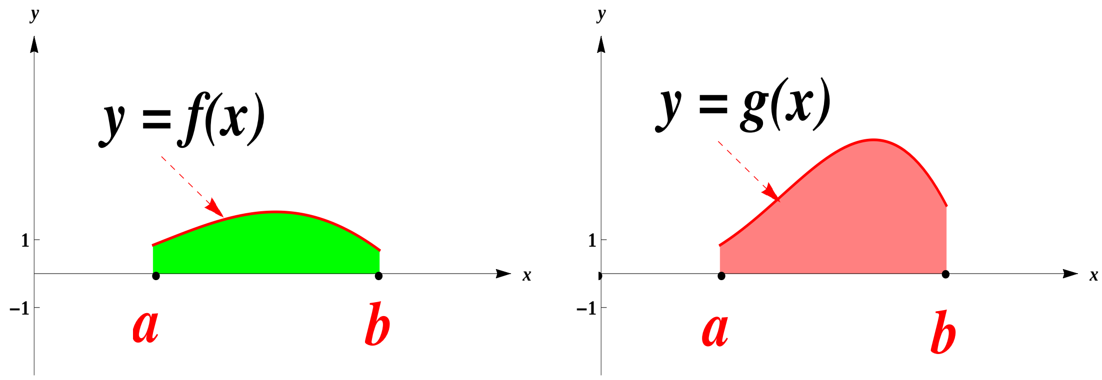


FIGURE 11.2 – Illustration graphique de la croissance pour une intégrale, dans le cas de fonctions continues par morceaux.

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Propriété 18. Relation de Chasles
Soit f une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout c de $[a,b]$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Propriété 19. Etant données deux fonctions f et g continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, égales sauf en un nombre fini de points :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

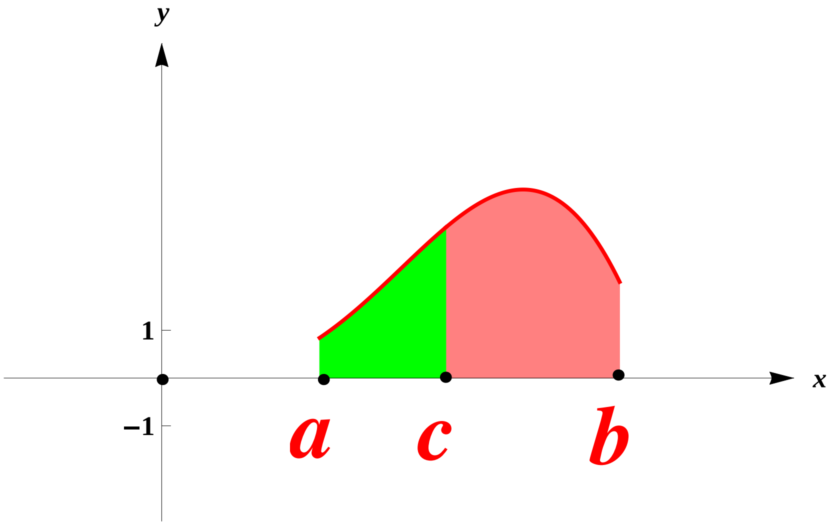


FIGURE 11.3 – Illustration graphique de la relation de Chasles pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème 41. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulle.*
Alors, si :

$$\int_a^b f(t)\, dt = 0$$

la fonction f est nulle sur $[a, b]$:

$$\forall t \in [a, b] \; : \; f(t) = 0$$

Démonstration. Il est clair que si la fonction f est identiquement nulle sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt = 0$$

Réciproquement, si la fonction f est continue, positive, et telle que son intégrale sur $[a, b]$ soit nulle : on raisonne par l'absurde en supposant f non identiquement nulle sur $[a, b]$. Il existe donc un réel c de $[a, b]$ tel que :

$$f(c) > 0$$

Si $a < c < b$, pr continuité de f en c, il existe donc un intervalle $[c-\eta, c+\eta] \subset [a, b]$, $0 < \eta < c$ tel que, pour tout réel x de $[c-\eta, c+\eta]$:

$$f(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, grâce à la relation de Chasles :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt & = & \displaystyle\int_a^{c-\eta} f(t)\,dt + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,dt + \int_{c+\eta}^{b} f(t)\,dt \\ & \geqslant & \displaystyle\int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,dt \\ & \geqslant & \displaystyle\int_{c-\eta}^{c+\eta} \frac{\varepsilon}{2}\,dt \\ & = & \eta\,\varepsilon \end{array}$$

(toutes les quantités sont positives par positivité de l'intégrale ; de plus, pour tout x de $[c-\eta, c+\eta]$: $f(x) \geqslant \varepsilon$ d'après ce qui précède.)

Ce dernier résultat est en contradiction avec la nullité de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt)$

Si $c = a$ ou $c = b$: la fonction f est continue, et $f(c) > 0$. La fonction f est donc strictement positive dans un voisinage (à droite ou à gauche suivant le cas) de c. Il existe donc un réel d de $]a, b[$ tel que :

$$f(d) > 0$$

ce qui permet de se ramener au cas précédent. □

Théorème 42. Inégalité de la moyenne *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
On note :

$$m = \underset{t\in[a,b]}{inf} f(t) \quad , \quad M = \underset{t\in[a,b]}{sup} f(t)$$

Alors :

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M\,(b-a)$$

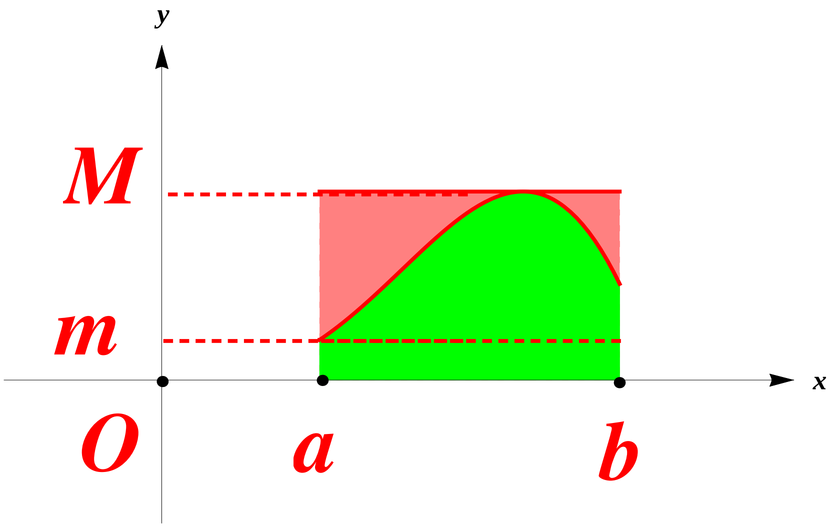


FIGURE 11.4 – Illustration graphique de l'inégalité de la moyenne pour l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$: l'aire sous la courbe entre a et b est plus grande que l'aire du rectangle de côtés m et $b-a$, et plus petite que celle du rectangle de côtés M et $b-a$.

Démonstration. La démonstration ne fait que formaliser les explications de la figure ci-dessus.
Par hypothèse, pour tout t de $[a, b]$:

$$m \leqslant f(t) \leqslant M$$

La croissance de l'intégrale permet d'en déduire :

$$\int_a^b m\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b M\, dt$$

soit :

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant M\,(b-a)$$

□

Théorème 43. Formule de la moyenne *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a < b$. On suppose que la fonction g est à valeurs positives :*

$$\forall\, t \in [a,b] : \quad g(t) \geqslant 0$$

Alors, il existe un réel c dans l'intervalle $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(c) \int_a^b g(t)\, dt$$

Démonstration. f étant continue sur $[a,b]$, il existe deux réels m et M tels que, pour tout t de $[a,b]$:

$$m \leqslant f(t) \leqslant M$$

g étant à valeurs positives, il en résulte, pour tout t de $[a,b]$:

$$m\, g(t) \leqslant f(t)\, g(t) \leqslant M\, g(t)$$

Par croissance de l'intégrale, il en résulte :

$$\int_a^b m\, g(t)\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \leqslant \int_a^b M\, g(t)\, dt$$

soit :

$$m \int_a^b g(t)\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \leqslant M \int_a^b g(t)\, dt$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt = 0$, n'importe quel c de $[a,b]$ convient.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt \neq 0$, on peut diviser membre à membre par $\int_a^b g(t)\, dt$:

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt}{\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt} \leqslant M$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'en déduire l'existence d'un réel c de $[a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt}{\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt}$$

ce qui conduit au résultat cherché. $\square$

Chapitre 12

Calcul intégral

12.1 Primitives

Définition 18. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une fonction F, dérivable sur I, est une ***primitive*** de f sur I si et seulement si :

$$F' = f \text{ sur } I$$

Propriété 20. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, les primitives de f sur I diffèrent toutes d'une constante.

Démonstration. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I :

$$F_1' = F_2'$$

ce qui conduit à :

$$F_1' - F_2' = 0$$

soit :

$$(F_1 - F_2)' = 0$$

Il en résulte :

$$F_1 - F_2 = \text{Fonction à valeur constante sur } I$$

qui est le résultat cherché.

□

Remarque 7. Ainsi, si F est une primitive sur I de la fonction f, alors, pour tout réel K, la fonction $t \mapsto F(t) + K$ est aussi une primitive de f, ce qui est assez logique, dans la mesure où la dérivée d'une fonction constante est nulle !

12.2 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 44. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I.*
L'application

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est une primitive de f sur I.

Démonstration. Désignons par F la fonction qui, à tout x de I, associe $\int_a^x f(t)\,dt$.

Il s'agit donc de montrer que, pour x_0 donné dans I, F est dérivable en x_0, avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. f étant continue en x_0, il existe un réel η_x tel que, pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_x$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Par suite, pour un réel $x < x_0$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x-x_0}-\frac{(x-x_0)\,f(x_0)}{x-x_0}\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt+\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt}{x-x_0}-\frac{f(x_0)\displaystyle\int_{x_0}^{x} dt}{x-x_0}\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0}-\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt}{x-x_0}\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0}-\frac{f(x_0)\displaystyle\int_{x_0}^{x} dt}{x-x_0}\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^x \left(f(t)-f(x_0)\right)\,dt}{x-x_0}\right| \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_0}^x \left|f(t)-f(x_0)\right|\,dt}{|x-x_0|} \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_0}^x \varepsilon\,dt}{|x-x_0|} \quad = \quad \varepsilon
\end{aligned}
$$

De même, pour un réel $x < x_0$: $\left|\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$.
ε étant quelconque, il peut être choisi aussi petit que possible. Il en résulte :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

soit :

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

qui est le résultat cherché.

□

Théorème 45. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I.*
Pour tout réel C, il existe une unique primitive de f prenant en a la valeur C. C'est l'application

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C + \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

Théorème 46. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et F une primitive de f sur $[a, b]$.*
Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Notation 1. On notera

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

12.3 Propriétés

Théorème 47. ***Intégration par parties***
Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
Alors :

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = [f(t)\,g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$$

Démonstration. f et g étant de classe C^1 sur $[a,b]$, il en est de même de leur produit $f\,g$.
De plus, pour tout réel t de $[a,b]$:

$$(f(t)\,g(t))' = f(t)\,g'(t) + f'(t)\,g(t)$$

f et g étant de classe C^1 sur $[a,b]$, les fonctions $f\,g'$ et $f'\,g$ sont continues sur $[a,b]$, et donc intégrables :

$$\int_a^b (f(t)\,g(t))'\,dt = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$$

soit :

$$[f(t)\,g(t)]_a^b = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$$

D'où le résultat.

□

Exemple 1. Soit x un réel strictement positif. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt & = & \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,1\,dt \\ & = & \displaystyle[\ln(t)\,t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\,t\,dt \\ & = & \displaystyle[\ln(t)\,t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\,t\,dt \\ & = & \displaystyle x\,\ln(x) - \int_1^x dt \\ & = & x\,\ln(x) - (x-1) \\ & = & x\,\ln(x) - x + 1 \end{array}$$

Théorème 48. ***Changement de variable***
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(J) \subseteq I$$

Alors, pour tout couple de réels $(\alpha, \beta) \in J^2$ *:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\left(t\right)\, dt$$

Démonstration. f étant continue sur I, elle possède au moins une primitive F sur I. Par dérivation composée :

$$(F \circ \varphi)' = f \circ \varphi \cdot \varphi'$$

$f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est continue sur J, comme produit de fonctions continues sur J. En intégrant de α à β, on en déduit :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(F \circ \varphi\right)'(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f \circ \varphi\right)(t).\varphi'(t)\, dt$$

soit :

$$\left[\left(F \circ \varphi\right)(t)\right]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f \circ \varphi\right)(t).\varphi'(t)\, dt$$

ou encore :

$$F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f \circ \varphi\right)(t).\varphi'(t)\, dt$$

qui s'écrit aussi :

$$\left[F(t)\right]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f \circ \varphi\right)(t).\varphi'(t)\, dt$$

mais également :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f \circ \varphi\right)(t).\varphi'(t)\, dt$$

D'où le résultat !

□

Exemple 2. Considérons l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^t \sqrt{e^t + 2}\, dt$. Il est judicieux d'effectuer le changement de variable $e^t = u$. L'application $t \mapsto e^t$ est de classe C^1.
On peut donc appliquer le théorème du changement de variable :

$$I = \int_1^e \sqrt{u+2}\,du = \int_1^e (u+2)^{\frac{1}{2}}\;du = \frac{2}{3}\left[(u+2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^e = \frac{2\,(e+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{27}}{3} = \frac{2\,(e+2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{3}$$

Propriété 21. Intégrale et parité
Soit a un réel positif, et f une fonction continue et paire sur l'intervalle $[-a, +a]$.
Alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$

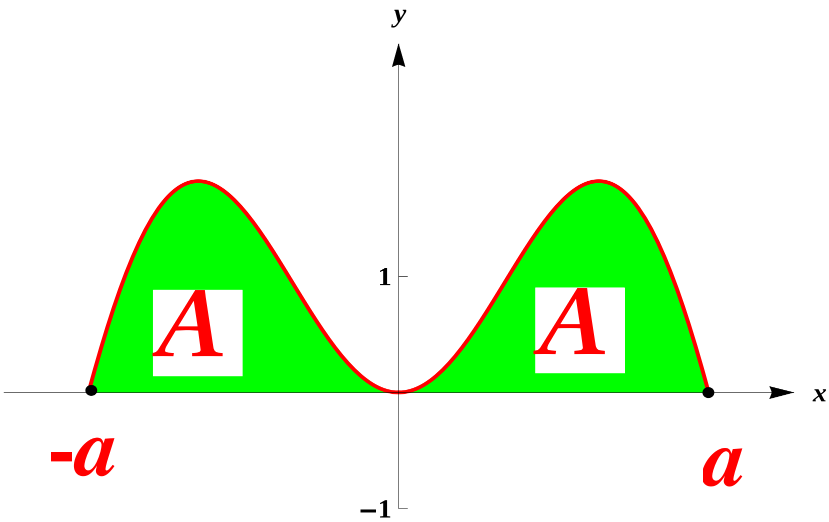


FIGURE 12.1 – L'intégrale d'une fonction paire.

Démonstration. On décompose tout simplement l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles, puis on effectue un changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(t)\,dt &= \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\
&= \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\
&= -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \qquad (f \text{ étant paire : } f(-t) = f(t)) \\
&= \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\
&= 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

□

Propriété 22. Intégrale et imparité
Soit a un réel positif, et f une fonction continue et impaire sur l'intervalle $[-a, +a]$. Alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

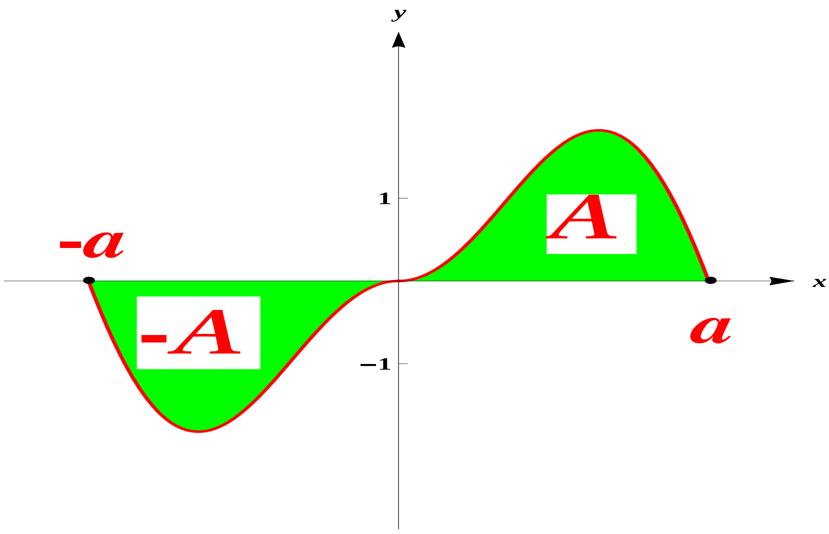


FIGURE 12.2 – L'intégrale d'une fonction impaire.

Démonstration. On décompose à nouveau l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles, puis on effectue un changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(t)\,dt &= \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\
&= \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\
&= -\int_{a}^{0} -f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \quad (f \text{ étant impaire : } f(-t) = -f(t)) \\
&= \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\
&= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Propriété 23. Intégrale et périodicité
Soit T un réel non nul, et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de période T.
Alors, pour tout réel a :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$$

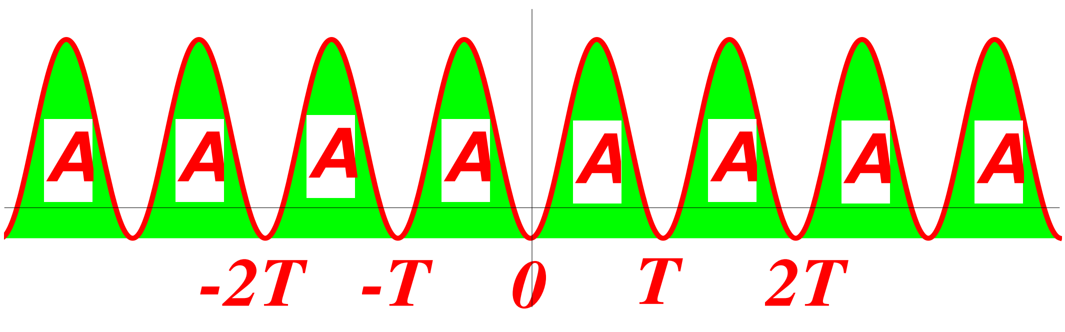


FIGURE 12.3 – L'intégrale d'une fonction continue de période T.

12.4 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\|$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\ln\|\cos x\|$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\text{cotan}x = -\frac{1}{\tan x}$	$\mathbb{R}\backslash\,\pi\,\mathbb{Z}$
$x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arccos x$	$]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin x$	$]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \text{arctan}x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \text{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$x \mapsto \text{sh}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \text{sh}\, x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$x \mapsto \text{ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}$	$x \mapsto \ln(\text{ch}\, x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$	$x \mapsto \text{th}\, x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\text{coth}\, x$	$\mathbb{R}^\star$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \mapsto \text{argsh}\ x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \text{argch}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \text{argth}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x\,\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^\star$

Cinquième partie

Développements limités et asymptotiques

On introduit ici un nouvel outil permettant l'étude locale des fonctions : les développements limités, qui permettent notamment de déterminer la limite en un point d'une fonction donnée sous une forme indéterminée (par exemple, le quotient de deux fonctions ayant toutes les deux une limite nulle). Les développements limités sont aussi d'une grande utilité pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point, trouver l'équation de la tangente à son graphe en ce point, et préciser la position relative du graphe et de sa tangente.

Chapitre 13

Notations de Landau

13.1 Négligeabilité

Définition 1. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a. On dit que f est ***négligeable*** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g(x)\right) \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{=} o\left(g\right)$$

On dit que f est un « petit o » de g au voisinage de a

Notation 2. La notation « petit o », de même que la notation « grand $\mathcal{O}$ », qui sera vue plus loin, est appelée ***notation de Landau***, en hommage au mathématicien Edmund Landau [1]. Leur paternité est visiblement assez controversée, et reviendrait, a priori, à Paul Bachmann [2].

Exemple 1. On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel x, par

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^4$$

1. Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), mathématicien allemand, spécialiste de théorie des nombres.
2. Paul Bachmann (1837-1920), mathématicien allemand lui aussi, et également spécialiste de théorie des nombres.

Alors, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, on en déduit : $f\underset{+\infty}{=}o(g)$.

Notation 3. Pour traduire le fait qu'une fonction f possède une limite nulle en a, $a\in\mathbb{R}$, ou, éventuellement, $a=+\infty$ ou $a=-\infty$, on écrit aussi :

$$f(x)\underset{x\to a}{=}o(1)$$

13.2 Domination

Définition 2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a, sans, pour autant, que $g(a)$ soit non nul.
On dit que f est ***dominée*** par g au voisinage de a si il existe une constante positive C telle que, pour tout réel x dans un voisinage de a

$$|f(x)|\leqslant C\;|g(x)|$$

On note alors

$$f(x)\underset{x\to a}{=}\mathcal{O}(g(x))\quad\text{ou}\quad f\underset{a}{=}\mathcal{O}(g)$$

On dit que f est un « grand $\mathcal{O}$ » de g au voisinage de a.

Exemple 2. On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel strictement positif, par

$$f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{2^x}\quad,\quad g(x)=\frac{3}{2^x}$$

Alors, comme, pour tout réel $x>1$:

$$|f(x)|=\left|\frac{2-\frac{1}{x}}{2^x}\right|\leqslant\left|\frac{2}{2^x}\right|\leqslant\left|\frac{3}{2^x}\right|=|g(x)|$$

on a bien : $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}\mathcal{O}(g(x))$.

13.3 Equivalence

Définition 3. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a, sans, pour autant, que $g(a)$ soit non nul.
On dit que f est ***équivalente*** à g au voisinage de a si

$$f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o\,(g(x))$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{\sim} g$$

Exemple 3. On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel x, par

$$f(x) = x^4 + x^3 \quad , \quad g(x) = x^4 + x^2$$

Alors, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, on en déduit : $f \underset{+\infty}{\sim} g$.

Remarque 1. Attention aux manipulations successives et hasardeuses d'équivalents ! ! ! ! !
Pour cette raison, on ne donnera pas, dans ce cours, de résultats généraux ni de « recettes » pour la manipulation d'équivalents, la meilleure méthode, la plus fiable et la plus sûre, étant de manipuler des « o » ou des « $\mathcal{O}$ », suivant les cas et ce qui est le mieux adapté. Mais attention, on ne peut pas utiliser ceux-ci dans des inégalités !

Chapitre 14

Développements limités

14.1 Définitions

Définition 4. Développement limité au voisinage d'un point
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a un point de I, et n un entier naturel non nul. On dit que f admet un ***développement limité d'ordre*** n ***au voisinage de*** a, s'il existe des nombres réels a_0, a_1, …, a_n et une fonction ε de limite nulle en 0 tels que, pour tout réel x de I :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a)$$

ce qui s'écrit aussi, avec la notation « petit o » :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Remarque 2. On parle de « développement limité », car on se situe au voisinage d'un point donné, et non en l'infini.

Remarque 3. Un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point consiste donc à approcher, localement, cette fonction par un polynôme. L'ordre du développement limité est aussi celui de la précision de cette approximation polynomiale. Attention ! Il n'y a pas, en général, égalité entre la fonction et le polynôme qui l'approche, d'où l'importance de bien faire figurer le reste !

Exemple 4. Au voisinage de zéro, la fonction *sinus* peut ainsi être approchée par les fonctions polynomiales $x \mapsto x$, $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3\,!}$, et $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3\,!} + \dfrac{x^5}{5\,!}$:

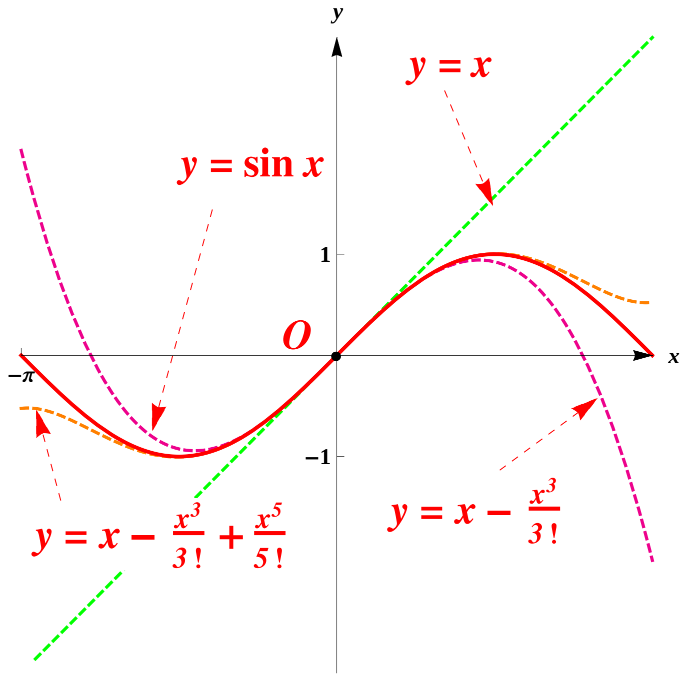


FIGURE 14.1 – Le graphe de la fonction *sinus* et de trois de ses approximations polynomiales au voisinage de 0.

Exemple 5.

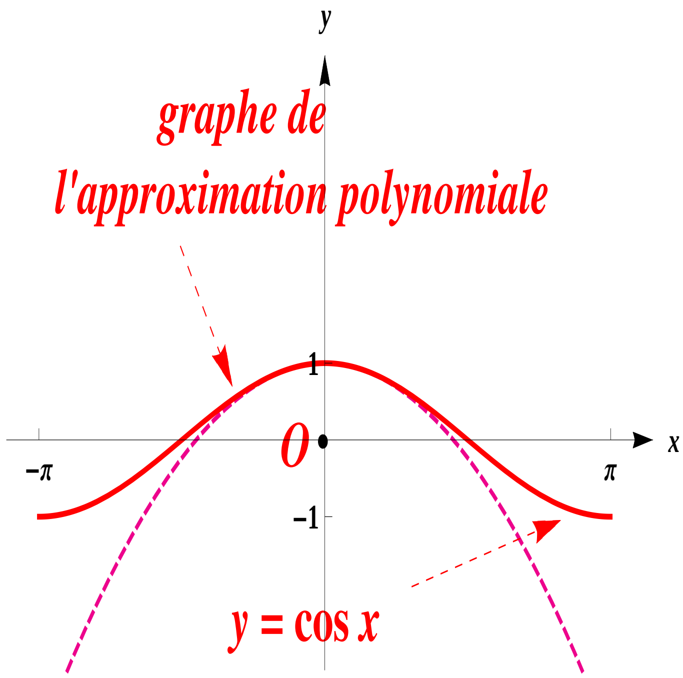


FIGURE 14.2 – Le graphe d'une approximation polynomiale de la fonction *cosinus* au voisinage de 0.

Définition 5. Partie principale d'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'un développement limité
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de $a \in I$, de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + \ldots + a_n\,(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a)$$

On appelle ***partie principale d'ordre*** n du développement limité de f le polynôme

$$a_0 + a_1\,(x-a) + \ldots + a_n\,(x-a)^n$$

Remarque 4. Lorsque x tend vers a :

$$|x-a| \text{ est très petit devant } |a_0|$$
$$\left|(x-a)^2\right| \text{ est très petit devant } |a_1\,(x-a)|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|(x-a)^n| \text{ est très petit devant } \left|a_{n-1}\,(x-a)^{n-1}\right|$$

Théorème 49. ***Unicité du développement limité***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un point de I. Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ au voisinage de a, alors celui-ci est unique.

Démonstration. Ce théorème est admis.

□

14.2 Intégration des développements limités

Propriété 1. Intégration des développements limités
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un point de I.
Si f est dérivable sur I, et si sa dérivée f' admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ au voisinage de a, de la forme :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a) \\ & = & a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \end{array}$$

alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a, dont la partie principale d'ordre $n+1$ est obtenue en primitivant terme à terme celle du développement limité de f', de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(a) + a_0\,(x-a) + \dfrac{a_1}{2}\,(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1}\,(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\,\varepsilon(x-a) \\ & = & f(a) + a_0\,(x-a) + \dfrac{a_1}{2}\,(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1}\,(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \end{array}$$

Démonstration. Ce résultat est admis.

□

Exemple 6. Développement limité de la fonction logarithme népérien au voisinage de 1
On intègre le développement limité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$, fonction qui s'annule pour $x=0$. Il en résulte :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

En changeant x en $-x$, on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

14.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 50. ***Formule de Taylor-Young*** [1]
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un point de I. Si f est n fois dérivable en a, alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

où, pour tout entier i de $\{1, \ldots, n\}$, $f^{(i)}$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de f.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur l'entier n.

$\rightsquigarrow$ La propriété est bien vraie au rang 1 :
par hypothèse, la fonction f est (une fois) dérivable en a. Par suite :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + o\left((x-a)\right)$$

Ainsi, elle admet un développement limité d'ordre 1 en a.

$\rightsquigarrow$ Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n > 0$; si la fonction f est $n+1$ fois dérivable en a, sa dérivée f' est donc n fois dérivable en a. L'hypothèse de récurrence permet d'en déduire qu'elle admet donc un développement limité donné par :

$$f'(x) = f'(a) + (x-a)\, f''(a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

En intégrant ce développement limité, on obtient celui de f.

$\square$

Remarque 5. **Attention !**

Une fonction peut admettre un développement limité à un ordre $n \geqslant 2$ au voisinage d'un point, sans être n fois dérivable en ce point. C'est le cas, par exemple, de la fonction f qui, à tout réel x non nul, associe $x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. William Henry Young (1863-1942), mathématicien anglais, spécialiste de calcul différentiel, théorie de la mesure, analyse spectrale, analyse complexe.

Au voisinage de zéro, f admet le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 + x^2\, x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec :

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

La dérivée de f peut être prolongée par continuité en zéro, puisque :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = 0$$

mais ce n'est pas le cas de sa dérivée seconde, puisque :

$$\frac{3\,x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = 3\,x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite lorque x tend vers zéro.

14.4 Développements limités usuels

Dans ce qui suit, n désigne un entier naturel.

Théorème 51. ***Développement limité au voisinage de 0 de la fonction*** $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\,\varepsilon(x) \\ &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

Théorème 52. ***Développement limité au voisinage de 0 de la fonction*** $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n\, x^n + x^n\, \varepsilon(x) \\ &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n\, x^n + o\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

Théorème 53. ***Développement limité au voisinage de 0 de la fonction*** $x \mapsto \ln(1+x)$

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\, \frac{x^n}{n} + x^n\, \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\, \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, x^k}{k} + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

Théorème 54. ***Développement limité au voisinage de 0 de la fonction*** $x \mapsto \ln(1-x)$

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + x^n\, \varepsilon(x) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

Théorème 55. ***Développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle***

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\begin{array}{rcl} e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3\,!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n\,!} + x^n\,\varepsilon(x) \\ & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3\,!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n\,!} + o\left(x^n\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k\,!} + o\left(x^n\right) \end{array}$$

Théorème 56. ***Développement limité au voisinage de 0 des fonctions trigonométriques***

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\begin{array}{rcl} \cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^4}{4\,!} - \dfrac{x^6}{6\,!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)\,!} + x^{2n+1}\,\varepsilon(x) \\ & = & 1 - \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^4}{4\,!} - \dfrac{x^6}{6\,!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)\,!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k)\,!} + o\left(x^{2n+1}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sin x & = & x - \dfrac{x^3}{3\,!} + \dfrac{x^5}{5\,!} - \dfrac{x^7}{7\,!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + x^{2n+2}\,\varepsilon(x) \\ & = & x - \dfrac{x^3}{3\,!} + \dfrac{x^5}{5\,!} - \dfrac{x^7}{7\,!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + o\left(x^{2n+2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \tan x & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\,x^5}{15} + \dfrac{17\,x^7}{315} + x^8\,\varepsilon(x) \\ & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\,x^5}{15} + \dfrac{17\,x^7}{315} + o\left(x^8\right) \end{array}$$

On ne donnera pas, ici, de développement limité à l'ordre n, au voisinage de zéro de la fonction tangente ; il faut savoir que ce développement existe, mais fait intervenir *des quantités qu'il serait trop compliqué de définir ici (les nombres de Bernoulli en l'occurence).*

$$\begin{aligned}\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\,\varepsilon(x)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)\end{aligned}$$

Théorème 57. ***Développement limité au voisinage de 0 des fonctions trigonométriques hyperboliques en*** 0

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\begin{aligned} ch\,(x) &= 1+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\frac{x^6}{6\,!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}+x^{2n+1}\,\varepsilon(x) \\ &= 1+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\frac{x^6}{6\,!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}+o\left(x^{2n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}+o\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sh\,(x) &= x+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\frac{x^7}{7\,!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}+x^{2n+2}\,\varepsilon(x) \\ &= x+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\frac{x^7}{7\,!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}+o\left(x^{2n+2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{,\,x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}+o\left(x^{2n+2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} th\,(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2\,x^5}{15}-\frac{17\,x^7}{315}+x^8\,\varepsilon(x) \\ &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2\,x^5}{15}-\frac{17\,x^7}{315}+o\left(x^8\right) \end{aligned}$$

De même que pour la fonction tangente, on ne donne pas, ici, de développement limité à l'ordre n, au voisinage de zéro de la fonction tangente hyperbolique, qui fait aussi intervenir les nombres de Bernoulli.

$$\begin{aligned} argthx &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\,\varepsilon(x) \\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right) \end{aligned}$$

Théorème 58. ***Développement limité au voisinage de 0 de la fonction*** $x \mapsto (1+x)^\alpha$***,*** $\alpha \in \mathbb{R}^\star$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha\,x+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,x^2+\ldots+\frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n\,!}\,x^n+x^n\,\varepsilon(x)\\ &= 1+\alpha\,x+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,x^2+\ldots+\frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n\,!}\,x^n+o\,(x^n)\end{aligned}$$

14.5 Opérations algébriques et composition des développements limités

Comment procéder ?

i. **Règle numéro 1 :**
dans un développement limité, on ne conserve pas les termes plus petits que le reste.
Ainsi, pour un développement limité à un ordre n donné ($n \in \mathbb{N}^\star$), si p est un entier strictement plus grand que n :

$$x^p+x^n\,\varepsilon(x)=x^n\,\varepsilon(x) \quad , \quad x^p\,\varepsilon(x)+x^n\,\varepsilon(x)=x^n\,\varepsilon(x)$$

ou encore, avec la notation « petit o » :

$$x^p+o\,(x^n)=o\,(x^n) \quad , \quad o\,(x^p)+o\,(x^n)=o\,(x^n)$$

(ceci vient du fait que $x^p=x^n x^{p-n}=x^n\,\varepsilon(x)$).

On prendra bien garde au fait que ces égalités se lisent de la gauche vers la droite, et non l'inverse !

Exemple 7. Au voisinage de 0 :

$$x^4=o\left(x^3\right) \quad , \quad o\left(x^5\right)+o\left(x^7\right)=o\left(x^4\right) \quad , \quad x^2\,o\left(x^5\right)=o\left(x^5\right)$$

Exemple 8. Au voisinage de 0, à l'ordre 1 :

$$\begin{array}{rcc} -3\,\cos^2 x\,\sin x & = & -3\,(1-\sin^2 x)\,\sin x \\ & = & -3\,\sin x + 3\,\sin^3 x \\ & = & -3\,(x+o(x)) + 3\,(x+o(x))^3 \\ & = & -3\,x + o(x) \end{array}$$

Exemple 9. Au voisinage de 0, à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{rcc} 3\,\sin^2 x\cos x & = & 3\,(1-\cos^2 x)\,\cos x \\ & = & 3\,\cos x - 3\,\cos^3 x \\ & = & 3\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - 3\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)^3 \\ & = & 3\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - 3\left(1-\dfrac{3\,x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) \\ & = & 3\,x^2 + o\left(x^2\right) \end{array}$$

ii. **Règle numéro 2 :**
pour éviter des calculs trop lourds et pénibles, on n'explicite les « factorielles » qu'à la fin !

Exemple 10. Calcul à éviter ! ! ! !
Pour déterminer un développement limité à l'ordre 4 en zéro de la fonction $x \mapsto e^x \sin x$, il est peu judicieux de procéder ainsi :

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + o\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{3\,!} + o\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \\
&= \begin{array}{c} x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^3\right)\right) \\ -\dfrac{x^3}{6}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \\ +o(x^4)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \end{array} \\
&= \begin{array}{c} x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^5}{24} + o\left(x^4\right) \\ -\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^5}{12} + \dfrac{x^6}{36} - \dfrac{x^7}{144} + o\left(x^6\right) \\ + \ldots + \text{horribles fractions} \end{array}
\end{aligned}$$

Exemple 11. Calcul modèle ! ! ! !
Pour déterminer un développement limité à l'ordre 4 en zéro de la fonction $x \mapsto e^x \sin x$, il est préférable de procéder ainsi :

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= \left(1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+o\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{3\,!}+o\left(x^4\right)\right)\\
&= x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+o\left(x^4\right)\right)\\
&\quad -\frac{x^3}{3\,!}\left(1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+o\left(x^4\right)\right)\\
&\quad +o\left(x^4\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+o\left(x^4\right)\right)\\
&= x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3\,!}+o\left(x^4\right)-\frac{x^3}{3\,!}-\frac{x^4}{3\,!}+o\left(x^4\right)\\
&= x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3\,!}+o\left(x^4\right)-\frac{x^3}{3\,!}-\frac{x^4}{3\,!}+o\left(x^4\right)\\
&= x+x^2+\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

iii. **Règle numéro 3 :**
pour déterminer le développement limité au voisinage de zéro, à un ordre $n \in \mathbb{N}^\star$, de la composée de deux fonctions f et g, où g tend vers zéro : on commence par poser $g(x) = X$, et on effectue le développement limité de f en zéro à un ordre suffisamment élevé p afin que le développement de la fonction composée soit bien d'ordre n par rapport à x :

$$(f \circ g)\,(x) = f(X) = \alpha_0 + \alpha_1\, X + \alpha_2\, X^2 + \ldots + \alpha_n\, X^p + o(X^p)$$

Il reste ensuite à développer à l'ordre n par rapport à x les termes $X = g(x)$, $X^2 = \left(g(x)\right)^2$, …, $X^p = \left(g(x)\right)^p$, en ne gardant que les termes en x^n.

Exemple 12. Au voisinage de 0, à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= 1-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^4 x}{4\,!}+o\left(\sin^4 x\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3\,!}+o\left(x^4\right)\right)^2+\frac{1}{4\,!}\left(x-\frac{x^3}{3\,!}+o(x^4)\right)^4+o\left(x^4\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2\,x^4}{3\,!}+o\left(x^4\right)\right)+\frac{x^4}{4\,!}+o\left(x^4\right)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5\,x^4}{24}+o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

iv. **Règle numéro 4 :**
pour déterminer le développement limité, au voisinage de zéro, à un ordre $n \in \mathbb{N}^\star$, de la composée de deux fonctions f et g, il faut faire très attention dans les cas où la fonction g ne tend pas vers zéro en zéro !!!!

Exemple 13. Au voisinage de 0, à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= e\,e^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= e\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

iv. **Règle numéro 5 :**
Pour déterminer le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point $a \neq 0$, il suffit de poser : $x = a + h$, où h tend vers zéro.

Exemple 14. Déterminons la limite, lorsque θ tend vers $\frac{3\,\pi}{2}$, par valeurs inférieures, de $\frac{\cos(\theta)}{\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}$; on pose $\theta = \frac{3\,\pi}{2} - h$, où h tend vers zéro par valeurs positives (ce qui est logique et assez naturel, car θ tend vers $\frac{3\,\pi}{2}$ par valeurs inférieures, i.e. juste avant $\frac{3\,\pi}{2}$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\cos(\theta)}{\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)} &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} - h)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{3}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} -\frac{\sin(h)}{\sin\left(\frac{h}{3}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} -\frac{h + o(h)}{\frac{h}{3} + o\left(h\right)} \\
&= -3
\end{aligned}$$

iv. **Règle numéro 6 :**
Pour déterminer une limite en l'infini, il est parfois utile de se ramener à un développement limité au voisinage de zéro, en remarquant que la quantité $h = \dfrac{1}{x}$ tend donc vers zéro.

Exemple 15. Lorsque x tend vers $+\infty$, comme $\dfrac{1}{x}$ tend donc vers zéro, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\
&= e^{x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{3\,x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)} \\
&= e^{1 - \frac{1}{2\,x} + \frac{2}{3\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= e^1\, e^{-\frac{1}{2\,x} + \frac{2}{3\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= e\,\left\{1 - \frac{1}{2\,x} + \frac{2}{3\,x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\,x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} \\
&= e\,\left\{1 - \frac{1}{2\,x} + \frac{2}{3\,x^2} + \frac{1}{8\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} \\
&= e\,\left\{1 - \frac{1}{2\,x} + \frac{11}{24\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Chapitre 15

Développements asymptotiques

A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Henri Poincaré[1] *s'intéresse au problème « des trois corps », qui est un cas particulier du problème dit « des N corps », où on cherche à décrire le système formé par N corps célestes (étoiles, planètes), dont les mouvements sont régis par les lois de l'attraction universelle, et à étudier leur stabilité. Dans le cas « des trois corps », qui sont en fait le soleil, la terre, la lune, de masses respectives m_{soleil}, m_{terre}, m_{lune}, le rapport $\dfrac{m_{lune}}{m_{soleil}}$ est très petit : $\dfrac{m_{lune}}{m_{soleil}} \ll 1$. Pour résoudre ce problème, Poincaré eut l'idée d'effectuer un développement limité par rapport à cette dernière quantité. C'est ainsi qu'est apparue la notion de « développement asymptotique », la grandeur m_{soleil} étant « très grande ».*

De façon générale, un **développement asymptotique** *est obtenu lorsqu'une des quantités en jeu tend vers une limite infinie. L'inverse de cette quantité tendant vers zéro, il est alors possible de se ramener à un développement limité au voisinage de zéro.*

Exemple 16. Lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}+\frac{1}{3\,n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}\\ &= e^{1-\frac{1}{2\,n}+\frac{1}{3\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

1. 1854-1912. Outre ses apports aux mathématiques (il est considéré comme un des fondateurs de la topologie), il apporta aussi de nombreuses contributions à la physique théorique, en optique et en relativité.

(On a effectué un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$.)

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Exemple 17. Lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) &= \sin\left(\pi\, n\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\\
&= \sin\left(n\,\pi\left\{1+\frac{1}{2\,n}-\frac{1}{8\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\right)\\
&= \sin\left(n\,\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8\,n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \cos\left(n\,\pi-\frac{\pi}{8\,n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (-1)^n\,\cos\left(-\frac{\pi}{8\,n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (-1)^n\,\cos\left(\frac{\pi}{8\,n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (-1)^n\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{64\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\\
&= (-1)^n\left\{1-\frac{\pi^2}{128\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

(On a effectué un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$.)

Ainsi, $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$ n'a pas de limite lorsque n tend vers l'infini.

Sixième partie

Fonctions de plusieurs variables

En physique, chimie, biologie, etc ..., les quantités que l'on rencontre ne dépendent pas, en général, d'un seul paramètre. C'est ce que l'on appelle des fonctions de plusieurs variables.
C'est le cas, par exemple, de l'énergie potentielle électrique d'un système de deux charges électriques q_1 et q_2, distantes de r :

$$U(q_1, q_2, r) = \frac{q_1\, q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, r}$$

où ε_0 est la permittivité du vide.

Pour étudier les fonctions de plusieurs variables, les mathématiciens ont cherché à étendre les résultats déjà existants pour les fonctions d'une variable réelle.
Toutefois, des outils supplémentaires s'avèrent indispensables : dans $\mathbb{R}$, l'écart entre deux réels se mesure facilement. Dès que l'on passe à un espace de dimension supérieure, 2 ou 3, c'est un peu plus compliqué. Ce cours présentera donc, dans un premier temps, quelques notions de topologie élémentaire.
D'autre part, on se restreindra au cas de fonctions de deux ou trois variables, i.e. définies dans des domaines de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et qui correspondent aux variables bidimensionnelles et tridimensionnelles usuelles : coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

Notation 4. Dans ce qui suit, d peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3, suivant que la fonction considérée est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 16

Fonctions de plusieurs variables

Définition 1. On appelle ***fonction de deux variables, à valeurs réelles***, une application f définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2. On appelle ***fonction de trois variables, à valeurs réelles***, une application f définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3. Champ de vecteurs
On appelle ***champ de vecteurs***, une application f définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$.

On dit aussi que f est ***à valeurs vectorielles***.

Exemple 1. Le champ magnétique créé par un dipôle :

Définition 4. On appelle ***représentation graphique*** d'une fonction f de deux variables, à valeurs réelles, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x, y, f(x, y))$.

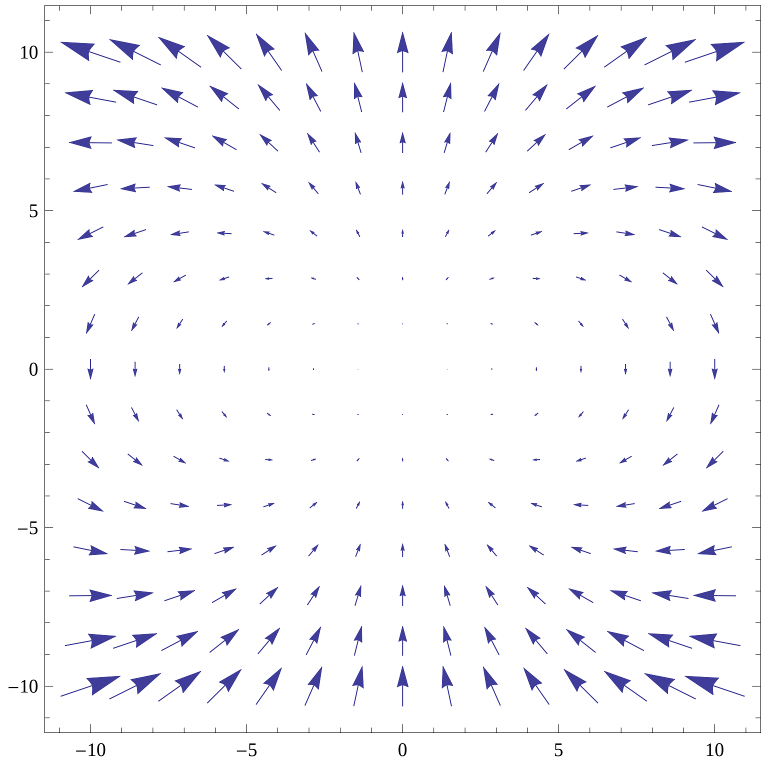


FIGURE 16.1 – Un exemple de champ de vecteurs : le champ magnétique créé par un dipôle.

Exemple 2.

Définition 5. Courbes de niveau
On appelle ***courbes de niveau*** d'une fonction f de deux variables, à valeurs réelles, l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = Constante$.

Exemple 3.

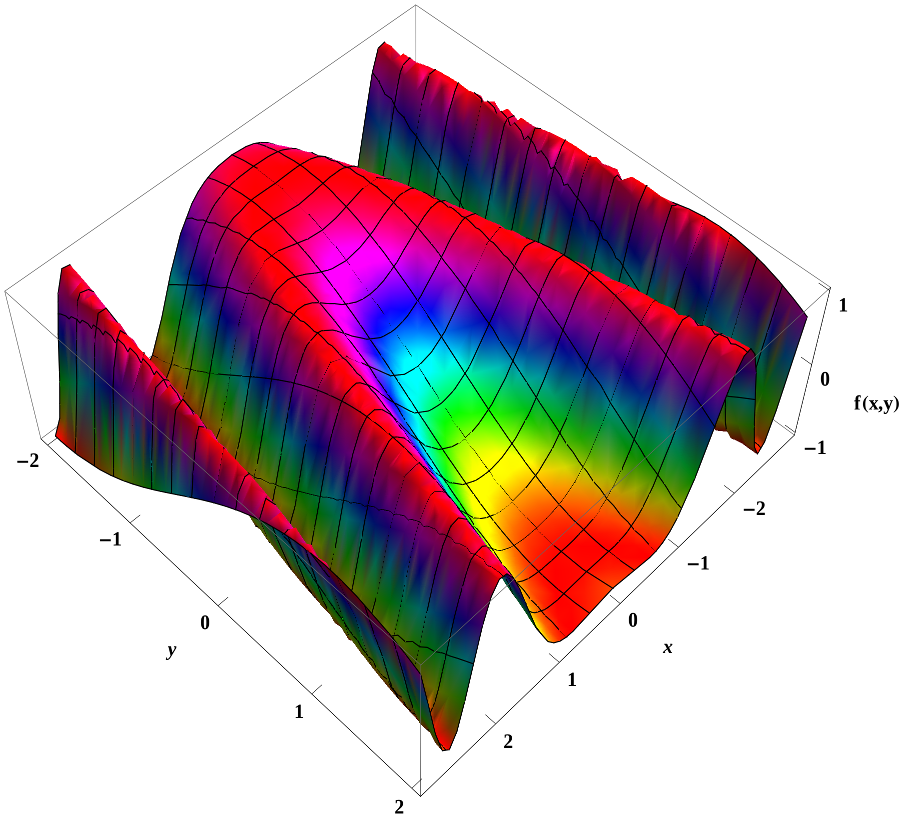


FIGURE 16.2 – La représentation graphique de la fonction $(x, y) \mapsto \sin(x^2 - y)$.

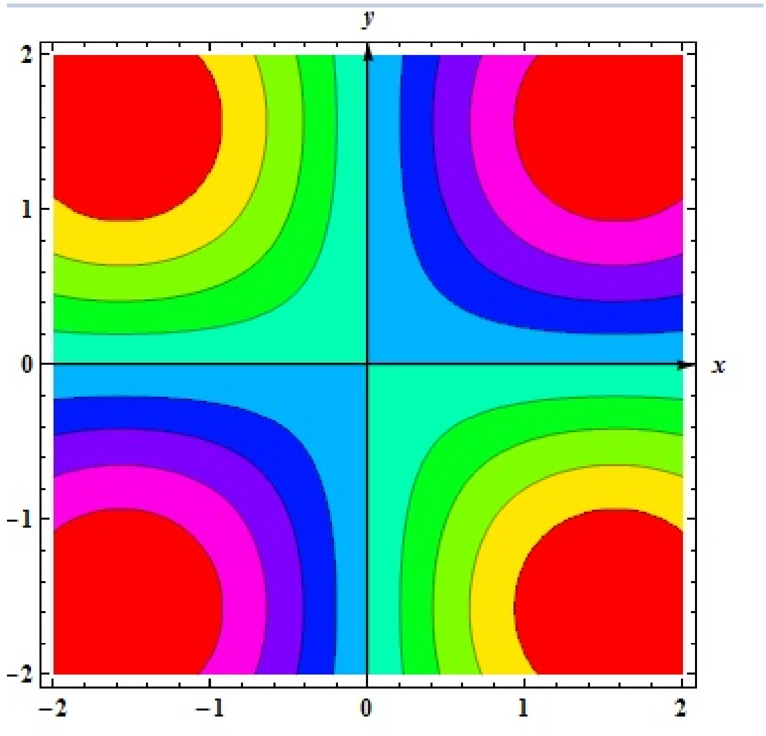


FIGURE 16.3 – Les courbes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto \sin(x)\,\sin(y)$.

Chapitre 17

Les systèmes de coordonnées usuelles

17.0.1 Coordonnées polaires

Lorsque l'on étudie les vibrations libres d'un pendule, la position de celui-ci est repérée par un angle. Les coordonnées cartésiennes ne sont pas les mieux adaptées à l'étude de ce genre de situations.
Les ***coordonnées polaires*** permettent de repérer la position d'un point M dans le plan en fonction de sa distance r à un point donné O, appelé pôle, et de l'angle θ, mesuré dans le sens trigonométrique, entre un axe de référence, appelé **axe polaire**, et la demi-droite d'origine O passant par M. Le réel positif r est la ***coordonnée radiale***, et θ la ***coordonnée angulaire***.

Le plus souvent, l'axe polaire coïncide avec l'axe des abscisses du système de coordonnées cartésiennes usuel. On a alors, pour tout point de coordonnées (x, y) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array} \right.$$

17.0.2 Coordonnées cylindriques

De même que les coordonnées polaires permettent de repérer facilement la position angulaire d'un point, les coordonnées cylindriques sont adaptées à des configurations où, à un angle et la distance à une origine, il faut rajouter une troisième composante, verticale, comme si on se déplaçait sur un cylindre.

Les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et les coordonnées cylindriques (r, θ, z_{cyl}) sont les suivantes :

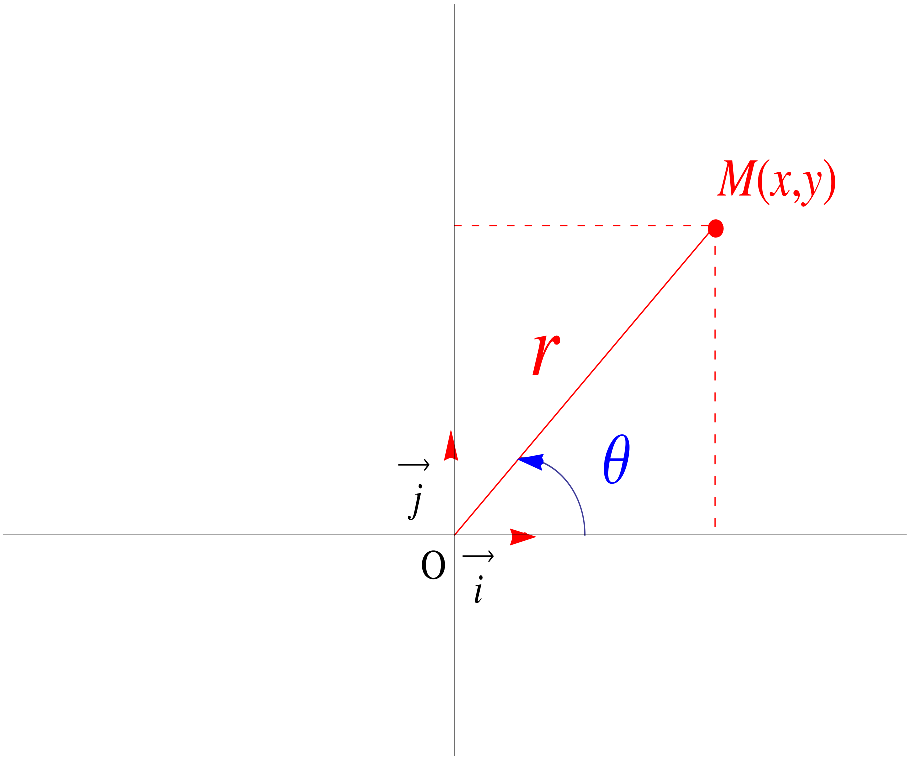


FIGURE 17.1 – Les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z_{cyl} \end{cases} \tag{17.1}$$

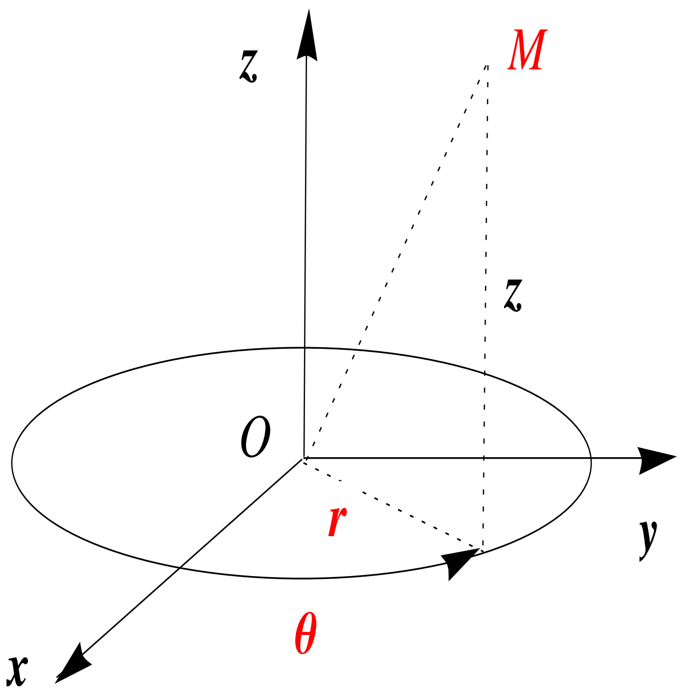


Figure 17.2 – Les coordonnées cylindriques.

17.0.3 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont adaptées à des configurations présentant une symétrie sphérique.

Les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \rho \cos\theta \, \sin\varphi \\ y & = & \rho \sin\theta \, \sin\varphi \\ z & = & \rho \cos\varphi \end{array}\right.$$

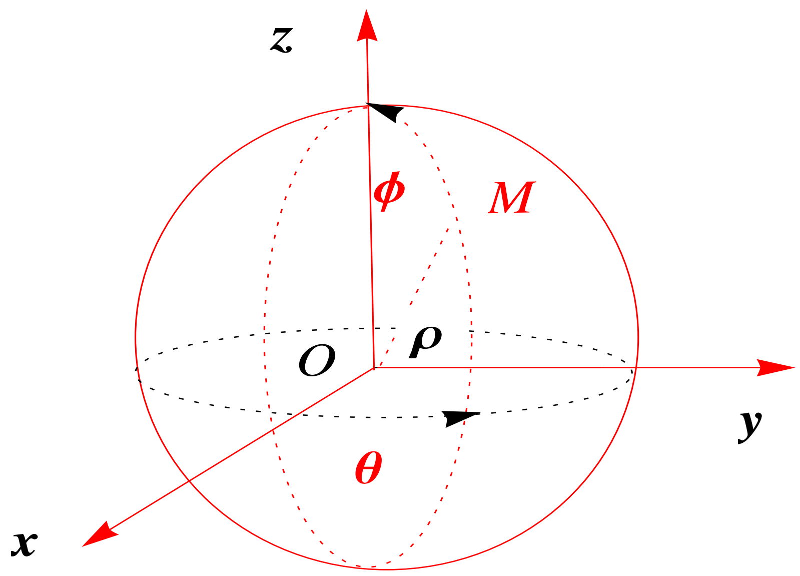


Figure 17.3 – Les coordonnées sphériques.

Chapitre 18

Limites, continuité

Définition 6. Limite d'une fonction en un point
Soit f une application d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et M_0 un point de R^2 (resp. de $\mathbb{R}^3$).
La fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}^d$ en M_0 si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout point M de $\mathcal{D}$:

$$\|\overrightarrow{M_0M}\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(M) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \ell$$

La fonction f est dite continue en M_0 si :

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Exemple 4. L'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \in \mathbb{R}$ qui, à tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, associe sa première coordonnée, est continue.

Propriété 1. Toute combinaison linéaire de fonctions continues en un point M_0 de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est continue en M_0.

Chapitre 19

Dérivation

19.1 Dérivées partielles

Il s'agit simplement, dans ce qui suit, d'étendre aux fonctions de plusieurs variables la notion de dérivée.
Dans un premier temps, on va donc définir la notion de dérivée partielle, obtenue en fixant toutes les variables, sauf une, puis en dérivant la fonction par rapport à celle-ci.

Définition 7. Dérivée partielle d'une fonction
Soit f une application d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
La fonction f admet une ***dérivée partielle par rapport à la variable*** x au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ (resp. (x_0, y_0, z_0)) si l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ (resp. $x \mapsto f(x, y_0, z_0)$) est dérivable en x_0. La valeur de cette dérivée en x_0 est alors appelée ***dérivée partielle de*** f ***par rapport à*** x ***en*** x_0. On écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\left(\text{resp. } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}\right)$$

On définit, de même, la dérivée partielle de f par rapport à la variable y (resp. z) au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ (resp. (x_0, y_0, z_0)).

Exemple 5. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(x,y,z) = \cos(x\,y) + x^2\,z$$

On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcc} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) & = & -y\,\sin(x\,y) + 2\,x\,z \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) & = & -x\,\sin(x\,y) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) & = & x^2 \end{array}\right.$$

Définition 8. Fonction de classe C^1
Soit f une application d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
La fonction f est dite ***de classe*** C^1 ***sur*** $\mathcal{D}$ si et seulement si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ sont continues sur $\mathcal{D}$.

19.2 Dérivée suivant un vecteur

Définition 9. Dérivée suivant un vecteur

Soit f une application d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), on appelle ***dérivée suivant le vecteur*** $\vec{u}$ de f au point $M_0 \in \mathcal{D}$ la limite, sous réserve d'existence :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M_0 + t\,\vec{u}) - f(M_0)}{t}$$

19.3 Gradient

Définition 10. Soit f une application de classe C^1 sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle ***gradient de f en*** $M_0 \in \mathcal{D}$, le vecteur :

$$\overrightarrow{grad_f}(M) = \nabla f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\vec{j}$$

$$\left(\text{resp. } \overrightarrow{grad_f}(M) = \nabla f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,\vec{k}\right)$$

Le symbole ∇ est appelé « nabla ».

19.4 Divergence

Définition 11. Soit f une application de classe C^1 sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).
On appelle ***divergence de f en*** $M_0 \in \mathcal{D}$, le scalaire :

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_x}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f_y}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\left(\text{resp. } \operatorname{div} f = \frac{\partial f_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f_y}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f_z}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

Remarque 1. **Application**

La divergence est une quantité extrêmement utilisée en Mécanique des fluides : elle permet de traduire - ou non - l'incompressibilité. Si l'on considère le champ de vecteurs constitué par les vecteurs vitesses des particules d'un fluide occupant initialement un volume $\mathcal{V}$, la divergence est proportionnelle au taux d'expansion relatif $\dfrac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}}$. Ainsi, pour un fluide incompressible, la divergence sera nulle.

19.5 Un outil géométrique indispensable : le produit vectoriel

Dans ce qui suit, on se place dans l'espace euclidien orienté, de dimension 3.

19.5.1 Définition géométrique

Définition 12. Angle entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. On choisit de placer leur origine en un point O de l'espace. Alors, par définition, l'angle $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ désigne l'angle orienté entre les droites passant par le point O, et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 13. Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ et $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est le vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, tel que :

i. si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$$

ii. si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\left|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|\,\vec{w}$$

où $\vec{w}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ tel que la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit directe.
$\vec{u}\wedge\vec{v}$ est alors unique.

Remarque 2. Pour déterminer si une base $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ de l'espace est directe, on peut utiliser la « règle du bonhomme d'Ampère » : si un personnage ayant les pieds en O, la tête en A, et regardant vers B, voit le point C à sa gauche, la base est directe, et indirecte dans le cas contraire.

Exemple 6. Dans l'espace euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

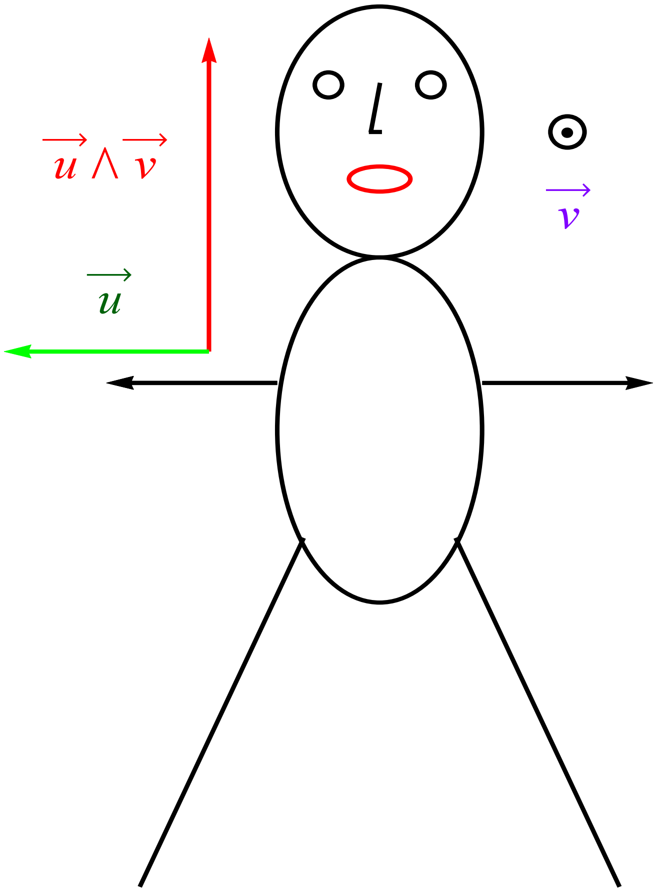


FIGURE 19.1 – Le bonhomme d'Ampère.

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \ , \ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \ , \ \ldots$$

et

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \ , \ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \ , \ \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

Remarque 3. **En pratique, dans l'espace euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé direct** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **:**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ u_3\, v_1 - u_1\, v_3 \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix}$$

19.5.2 Définition analytique

Définition 14. Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est l'unique vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que pour tout vecteur $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on ait

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Démonstration. Par le calcul ...

□

Proposition 1. Le produit vectoriel est **antisymétrique** :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \;\; : \;\; \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

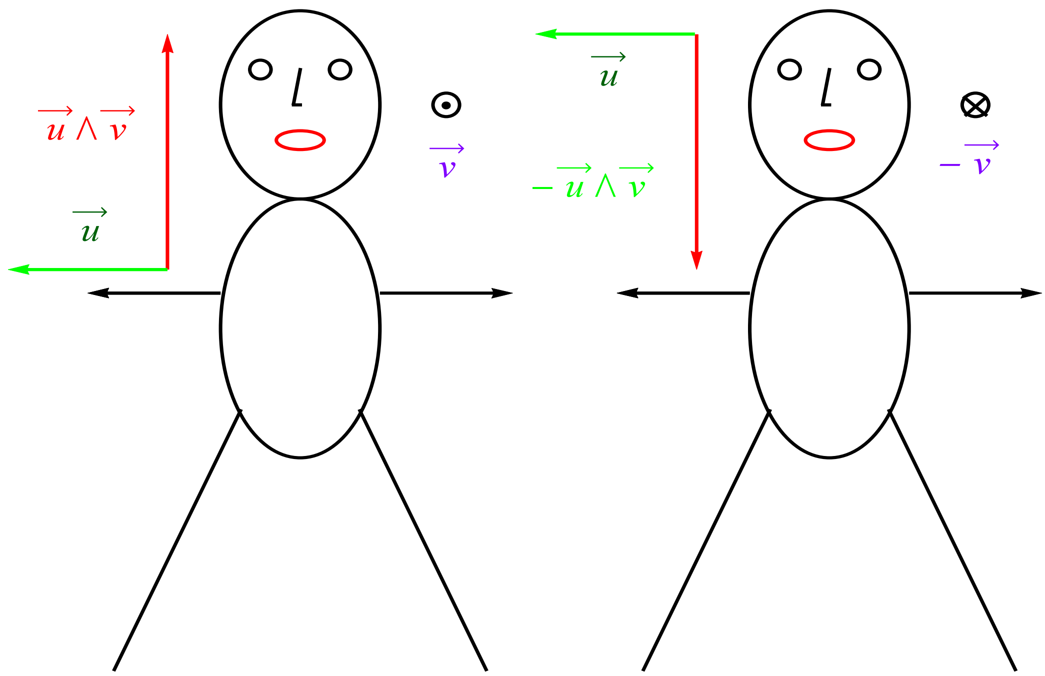


FIGURE 19.2 – Avec le bonhomme d'Ampère ...

Proposition 2. Le produit vectoriel est **bilinéaire** :

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\,,\forall\,\lambda \in \mathbb{R}\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} \vec{u}\wedge(\vec{v}+\lambda\,\vec{w}) & = & \vec{u}\wedge\vec{v}+\lambda\,\vec{u}\wedge\vec{w} \\ (\vec{v}+\lambda\,\vec{w})\wedge\vec{u} & = & \vec{v}\wedge\vec{u}+\lambda\,\vec{w}\wedge\vec{u} \end{array}\right.$$

Proposition 3.

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\ :\ \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ liés}$$

Proposition 4.

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\ :\ (\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{u}\ \ ,\ \ (\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{v}$$

Proposition 5.

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\ :\ \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\left|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|$$

Proposition 6. Double produit vectoriel

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \;:\; (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}$$

Démonstration. Par le calcul ...

□

19.6 Rotationnel d'un champ de vecteurs de l'espace

Définition 15. Soit $f : (x,y,z) \mapsto (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ une application de classe C^1 sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
On appelle ***rotationnel de f en M_0*** $\in \mathcal{D}$, le vecteur :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}\, f &= \nabla \wedge \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}(x_0,y_0,z_0) \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}(x_0,y_0,z_0) \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) - \dfrac{\partial f_y}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial f_x}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) - \dfrac{\partial f_z}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial f_y}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) - \dfrac{\partial f_x}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

19.7 Différentielle

On peut considérer que, de façon implicite, la notion de différentielle a été introduite au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle par Leohnard Euler et Alexis Clairaut, qui ont remarqué que, pour une fonction de deux variables x et y, la quantité

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$$

est invariante par changement de base.

Si l'on écrit cette quantité sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

on peut donc considérer que c'est l'image, par l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$*, du vecteur dont les composantes sont les quantités infinitésimales dx et dy,* $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

Plus récemment, c'est le mathématicien Maurice Frechet[1]*, qui a vraiment formalisé la notion de différentielle.*

Définition 16. Application différentiable
Soit f une application de classe C^1 sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
f est dite ***différentiable*** en $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée df_M telle que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ de norme suffisamment petite :

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) &= f(x,y) + h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k) \\ &= f(x,y) + df_M(x,y) + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k) \end{aligned}$$

où ε est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

1. Les fameux « espaces de Frechet », qui sont des espaces vectoriels topologiques complets, mais dont la topologie est induite par une famille dénombrable et séparante de semi-normes (l'axiome de séparation n'est pas satisfait), et non de normes.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

(resp. pour tout $(h,k,\ell) \in \mathbb{R}^3$ de norme suffisamment petite :

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k,z+\ell) &= f(x,y,z) + h\,\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + k\,\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \ell\,\tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) + \sqrt{h^2+k^2+\ell^2}\,\varepsilon(h,k,\ell) \\ &= f(x,y,z) + df_M(x,y,z) + \sqrt{h^2+k^2+\ell^2}\,\varepsilon(h,k,\ell) \end{aligned}$$

où ε est une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\left. \lim_{(h,k,\ell)\to(0,0)} \varepsilon(h,k,\ell) = 0 \right)$$

Définition 17. Différentielle
Soit f une application de classe C^1 sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
On appelle ***différentielle*** de f au point $M_0 \in \mathcal{D}$, que l'on note df_{M_0}, **l'application linéaire**

$$(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\left(\text{resp. } (h,k,l) \in \mathbb{R}^3 \mapsto h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + l\,\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$$

19.8 Dérivation composée

Théorème 59. *Soit f une application d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, de classe C^1, φ et ψ deux applications de I dans $\mathcal{D}$, de classe C^1.*
Alors, en tout point $M(x,y) \in \mathcal{D}$, la fonction composée $(x,y) \mapsto f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ est de classe C^1, et :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)\right] &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(\varphi(x,y),\psi(x,y))} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(\varphi(x,y),\psi(x,y))} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)\right] &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \times \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(\varphi(x,y),\psi(x,y))} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \times \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(\varphi(x,y),\psi(x,y))} \end{aligned} \right.$$

19.9 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 18. Fonction de classe C^2
Soit f une application définie sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}$.
f est dite de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$ et si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ sont aussi de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.

Théorème 60. ***Théorème de Schwarz***
Pour toute application f de classe C^2 sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\left(\textit{resp. } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)$$

19.10 Laplacien

Définition 19. Soit f une application de classe C^2 sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle ***Laplacien de f en*** $M_0 \in \mathcal{D}$ le scalaire [2] [5] :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$\left(\text{resp. } \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

2. Le laplacien apparaît, notamment, dans L'équation de Laplace $\Delta u = 0$, ainsi nommée en hommage au mathématicien et physicien Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Introduite, à l'origine, en mécanique newtonienne, elle apparaît également en astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique, etc.

Bibliographie

Ouvrages ou références directement cités

[1] Histoires de logarithmes, Commission Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, Ellipses, 2006.

[2] Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern, Hrsg. von C.J. Gerhardt. 1. Bd, Published 1899 by Mayer & Müller in Berlin, Library of Congress QA29 L45 A4 1899.

[3] Mauricio Garay, La géométrie des lumières à la Belle Epoque, Quadrature, numéro 87, 2013.

[4] Nicolas Lerner, Lecture Notes on Real Analysis, UPMC, 2011, http ://www.math.jussieu.fr/∼lerner/.

[5] Claire David et Pierre Gosselet, Equations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 2012.

[6] Claire David, Calcul Vectoriel, Dunod, Paris, 2012.

[7] L'ami de la religion et du roi, Journal ecclésiastique, Volume 46, 1825.

[8] Jean-Robert Argand, Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Gauthier-Villars, Paris, 1874, http ://www.bibnum.education.fr/mathematiques/geometrie/essai-sur-une-maniere-de-representer-des-quantites-imaginaires-dans-les-cons.

[9] Michèle Audin, Géométrie, EDP Sciences, Les Ullis, 2006.

[10] Jos Leys, Etienne Ghys, Aurélien Alvarez, Dimensions, une promenade mathématique, http ://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm.

[11] Adrien Douady et John H. Hubbard, Etude dynamique des polynômes complexes, Prépublications mathématiques d'Orsay 2/4 (1984 / 1985).

[12] Benoit Mandelbrot, Les objets fractals : Forme, hasard et dimension, Flammarion, Paris, 2010.

[13] http ://wwwmaths.anu.edu.au/ barnsley.

[14] Michael Barnsley, SuperFractals, Cambridge University Press, 2006.

[15] http ://www.superfractals.com.

[16] Daniel Lignon et Roger Beslan, Les maths, cent théorèmes, Le polygraphe, Angers, 2008.

[17] Arthur Cayley, A memoir on the Theory of Matrices, Philosophical Transactions, Londres, 1858.

[18] http ://www.math93.com/theoreme/matrices.html.

[19] Denis Serre, Matrices : Theory and Applications, Springer, New-York, 2002.

[20] David Lay, Linear Algebra and its Applications, 4^{th} edition, Addison-Wesley, New-York, 2012.

[21] Michèle Audin, Géométrie, EDP Sciences, Les Ulis, 2006.

[22] Raymond Queneau, Bâtons, chiffres et lettres, Gallimard, Paris, 1965.

[23] Henri Lebesgue, L'œuvre mathématique de Vandermonde, in Notices d'Histoire des Mathématiques, Université de Genève 1958, pp. 18-39.

[24] Ilia Itenberg, Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui, Volume 4, Cassini, Paris, 2010.

[25] Erwan Brugalle, Un peu de géométrie tropicale, Quadrature, n^o 74, p. 10-22, Paris, 2009.

[26] Algèbres tropicales et plus court chemin, Quadrature, n^o 72, pp. 22-28, avril 2009.

Ouvrages de référence

[27] Maryse Beguin, Théorie de la mesure et de l'intégration pour les probabilités, Ellipses, Paris, 2013.

[28] Jean-Marie Arnaudiès, Henri Fraysse, Cours de Mathématiques, tomes 1 à 3, Dunod, Paris, 1997.

[29] Xavier Gourdon, Les Maths en tête, Algèbre, Ellipses, Paris, 2009.

[30] Xavier Gourdon, Les Maths en tête, Analyse, Ellipses, Paris, 2009.

[31] Jean-Pierre Ramis, André Warusfel (dir.), Mathématiques Tout-en-un pour la Licence - Niveau L1 - 2e édition, Dunod, Paris, 2013.

[32] George B. Thomas Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Thomas' Calculus : Global Edition, Pearson Education, Edinbourg, 2009.

Autres

[33] http ://www.ljll.math.upmc.fr/∼ledret.

[34] Jacques Fejoz, Calcul vectoriel et matriciel de première année, http ://www.ceremade.dauphine.fr/∼fejoz/.

[35] http ://demonstrations.wolfram.com.
© 2012 Wolfram Demonstrations Project www.wolfram.com

[36] Wolfram Alpha LLC. 2011. http ://www.wolframalpha.com.

Index